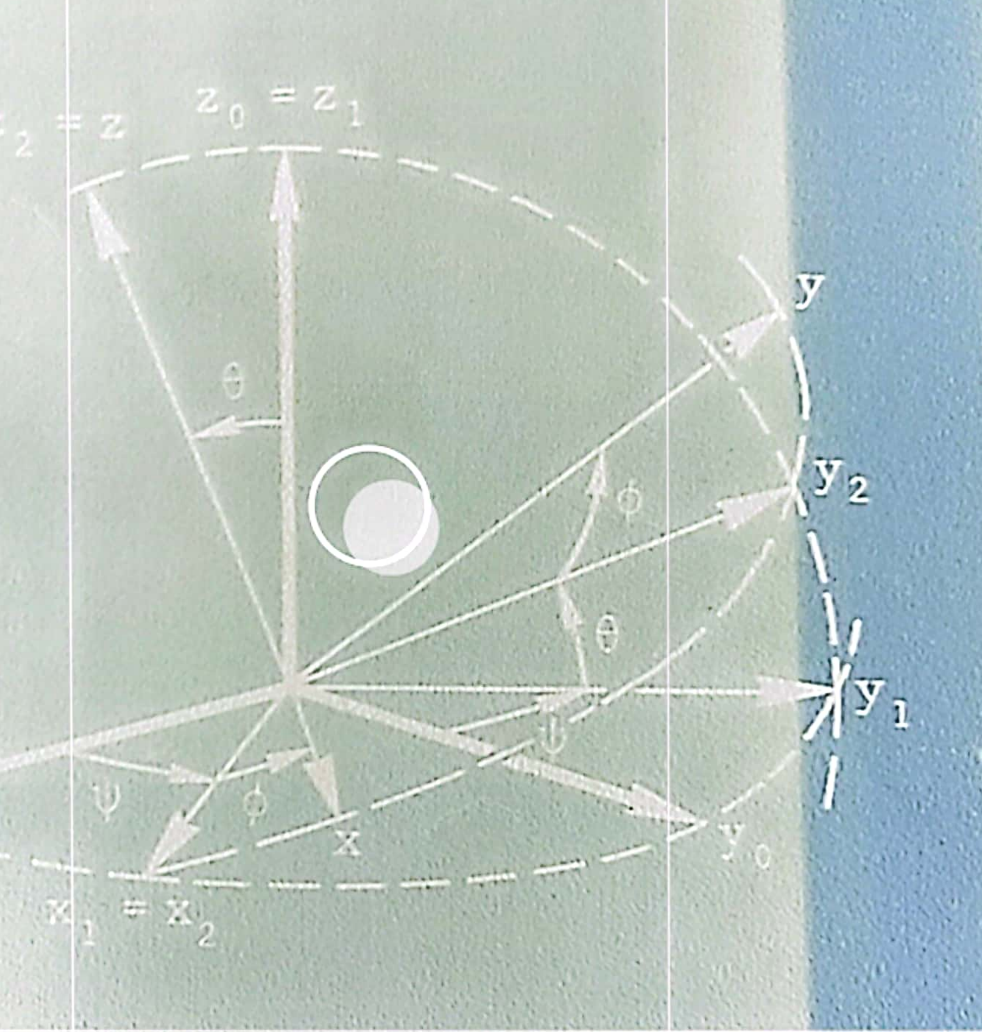
P. SOURIAC



mémo méca

premières années de facultés
math. sup. – math. spé.



CEPADUES EDITIONS

Dans la même collection

- THERMODYNAMIQUE
  par G. BRIAND et R.L. CLERC
- PROBABILITES
  par A. DELEDICQ
- ANALYSE et COMMANDE de SYSTEMES COMPLEXES
  par A. TITLI et al.
- COMPRENDRE, MAITRISER et APPLIQUER LE GRAFCET
  par M. BLANCHARD
- AIDE-MEMOIRE de CONTROLE-QUALITE
  par M. JAURAS
- DYNAMIQUE CHAOTIQUE
  par C. MIRA et I. GUMOWSKI
- INITIATION à la LOGIQUE PROGRAMMEE et au MICROPROCESSEUR
  par J. COUDERC

Du même auteur :

MEMO-MATH (CEPADUES-EDITIONS)

I.S.B.N. 2.85428.066.0

Dépôt légal : 4e trimestre 1981

N° Editeur : 81

MEMO - MECA

CEPADUES-EDITIONS

Collection NABLA

MEMO - MECA

P. SOURIAC

Maître Assistant
à l'Université Paul Sabatier.

CEPADUES - EDITIONS
111, rue Nicolas - Vauquelin, 31100 Toulouse

AVANT-PROPOS

Pour un débutant, la **mécanique rationnelle** est assez souvent d'un abord difficile, car c'est « la plus **physique** des sciencess **exactes** et la plus mathématique des sciences physiques ».

Dans ce livre, on s'efforce de donner l'essentiel des notions nécessaires à une bonne compréhension des fondements de la **mécanique rationnelle**, pour les points matériels, les solides et les systèmes.

Le lecteur trouvera un **minimum** de formules pour un **maximum** d'utilisations, ainsi qu'un index alphabétique détaillé, de brefs commentaires, des exemples et des démonstrations typiques.

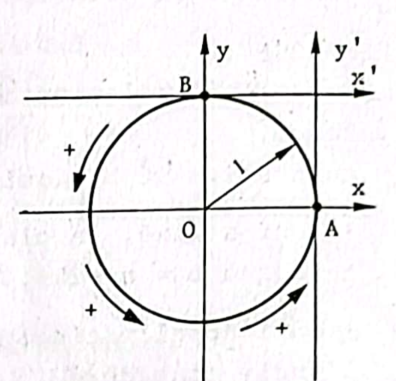
Ce livre devrait satisfaire les demandes réitérées de très nombreux étudiants.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

TRIGONOMETRIE PRATIQUE

1° - REPERE TRIGONOMETRIQUE - ANGLES



Le repère trigonométrique est constitué par :

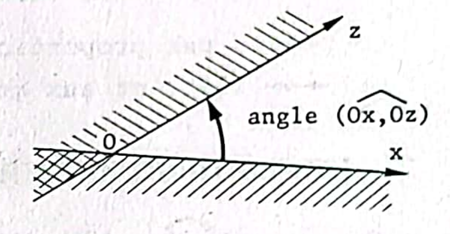
1. *Un repère orthonormé* $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ ou (xOy).
2. *Le cercle unité* (centre O, rayon 1).
3. *Deux autres axes* Bx', Ay', déduits de Ox, Oy respectivement par les translations de vecteurs $\vec{OB}$, $\vec{OA}$ (unitaires).
4. *L'orientation positive* usuelle (de sens contraire de celui des aiguilles de montre).
   Le sens positif est aussi dit : *direct*, ou encore : trigonométrique.

REMARQUES :

L'unité est la même pour chacun des 4 axes, le rayon du cercle est 1 et sa longueur est 2π.

Les angles utilisés en MECANIQUE sont en général ceux de "deux demi-axes", définis comme intersections de deux demi-plans.

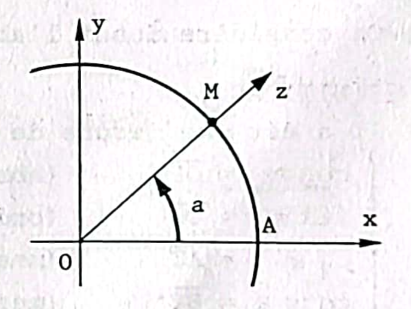
EXEMPLE :



Si on considère le demi-plan non hachuré bordé par Ox, et le demi-plan non hachuré bordé par Oz, on obtient l'intersection, non hachurée, qu'on désigne par $(\vec{Ox},\vec{Oz})$, ou $\widehat{Ox,Oz}$, et qu'on marque avec ↶ (voir schéma).

- Ox est le côté initial, ou côté origine ; Oz est le côté final, ou côté extrémité ; O est le sommet de l'angle.

MESURE D'UN ANGLE :



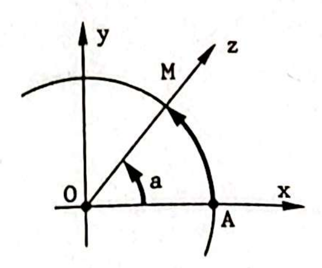
On suppose l'angle étudié, placé dans le repère trigonométrique de manière à avoir :

- le sommet confondu avec l'origine O.
- le côté origine confondu avec l'axe Ox.

Alors, l'autre côté coupe le cercle trigonométrique en un point (et un seul) M.

Lorsque l'on va de A à M sur le cercle dans le sens direct, l'on parcourt l'arc $\widehat{AM}$ et l'on dit que sa longueur a est la "*mesure principale*" de l'angle ; on remarque : $a \in [0, 2\pi[$.

Ce même angle possède une infinité d'autres mesures, obtenues en allant de A à M sur le cercle dans un sens quelconque, et en faisant autant de tours qu'on veut. Ces mesures sont de type $a + 2\pi$, $a - 2\pi$, $a + 4\pi$, $a - 4\pi$, etc... L'ensemble de ces mesures est, en incluant la principale : $\{a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.



REMARQUE :

Dans $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par l'énoncé suivant est une relation d'équivalence.

énoncé : $a \mathcal{R} b$ signifie "a-b est multiple de 2π".

- Pour a fixé, la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est donc l'ensemble des b tels que $b = a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- On l'appelle *classe de a, modulo* 2π ; c'est l'ensemble des mesures de l'angle considéré.

On écrit "l'ensemble des mesures de $\widehat{Ox,Oz}$ est $\{a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$"	
sous la forme commode :	$\widehat{Ox,Oz} = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
ou encore simplement :	$\widehat{Ox,Oz} = a \pmod{2\pi}$.

L'unité de mesure est le *radian*, tel qu'un tour direct sur le cercle corresponde à 2π radians. D'où :

1/2 tour direct : π , 1/4 de tour direct : $\frac{\pi}{2}$, etc...

On passe, par proportionnalité, des radians aux degrés en utilisant π rad $\longleftrightarrow$ 180°, et aux grades par π rad $\longleftrightarrow$ 200 gr.

2° - LIGNES TRIGONOMETRIQUES - VALEURS USUELLES

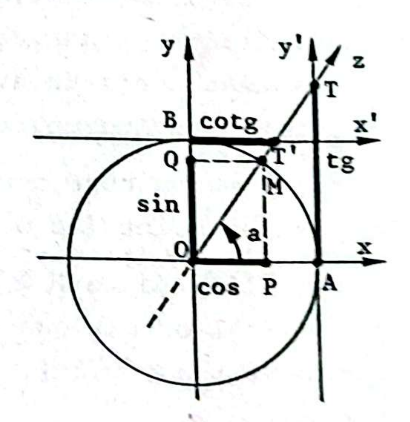
Un angle $\widehat{Ox,Oz} = a \pmod{2\pi}$ étant placé dans le repère trigonométrique, on considère le côté extrémité (le $\frac{1}{2}$ axe Oz) qui coupe le cercle en M, l'axe Ay' en T et l'axe Bx' en T'.

On considère aussi l'abscisse et l'ordonnée de M, resp. $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$.

DEFINITIONS :

Si a est une mesure de $\widehat{Ox,Oz}$:

cos a	$= \overline{OP}$	(abscisse de M)
sin a	$= \overline{OQ}$	(ordonnée de M)
tg a	$= \overline{AT}$	(mesurée sur l'axe Ay')
cotg a	$= \overline{BT'}$	(mesurée sur l'axe Bx')



Ainsi, à toute mesure $(a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ d'un angle, sont associées 4 *lignes trigonométriques* :

cos a, sin a, tg a, cotg a.

RELATIONS FONDAMENTALES :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \qquad (\forall a \in \mathbb{R})$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leqslant \cos a \leqslant +1 \\ -1 \leqslant \sin a \leqslant +1 \end{array}\right\} \qquad (\forall a \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

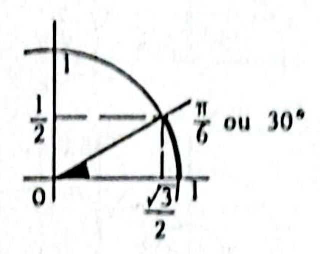
Autres relations (découlant des précédentes), on retiendra :

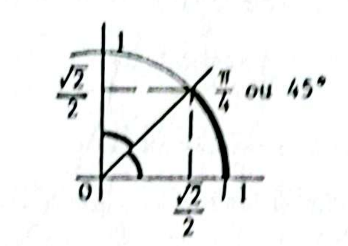
$$\cos^2 a = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a} \quad \text{ou} \quad 1+\operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

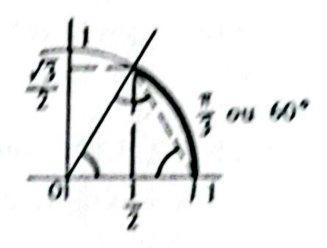
$$\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} \quad \text{et} \quad 1+\operatorname{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

VALEURS USUELLES :

Il suffit de retenir les valeurs des sin et cos, car tg et cotg s'en déduisent immédiatement. On peut s'aider de figures.



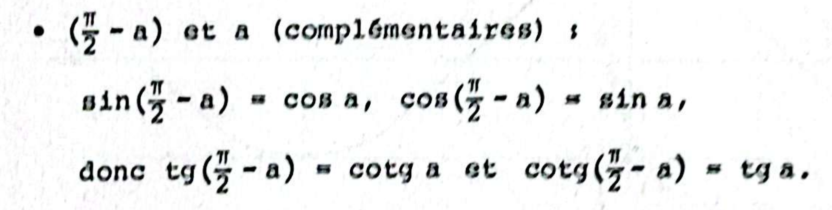




- 0 (mod 2π) : $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$
- $\frac{\pi}{6}$ (mod 2π) : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\frac{\pi}{4}$ (mod 2π) : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\frac{\pi}{3}$ (mod 2π) : intervertir les valeurs de sin et cos de $\frac{\pi}{6}$.
- $\frac{\pi}{2}$ (mod 2π) : de même, intervertir dans 0.

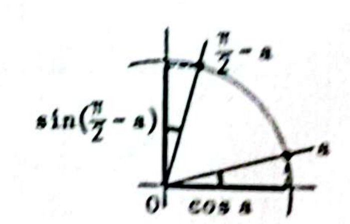
Plus généralement, on retrouve d'autres valeurs à l'aide de figures, par exemple les suivantes :

- $(\frac{\pi}{2} - a)$ et a (complémentaires) :



$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$, $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$,

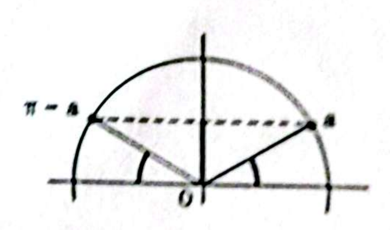
donc $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - a) = \operatorname{cotg} a$ et $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - a) = \operatorname{tg} a$.

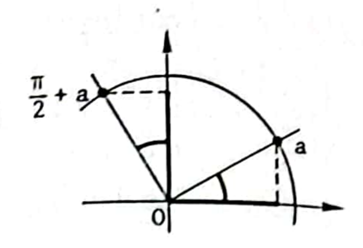


- $(\pi - a)$ et a (supplémentaires) :

$\sin(\pi - a) = \sin a$, $\cos(\pi - a) = -\cos a$,

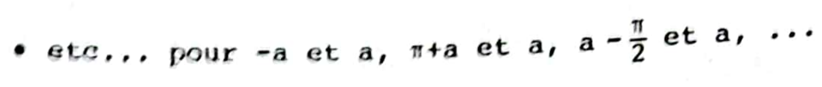
donc $\operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a$ et $\operatorname{cotg}(\pi - a) = -\operatorname{cotg} a$.





• $(\frac{\pi}{2}+a)$ et a

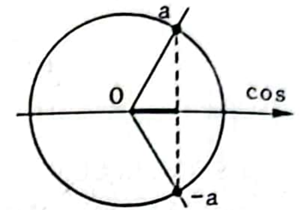
$\sin(\frac{\pi}{2}+a) = \cos a, \quad \cos(\frac{\pi}{2}+a) = -\sin a,$



• etc... pour $-a$ et a, $\pi+a$ et a, $a-\frac{\pi}{2}$ et a, ...

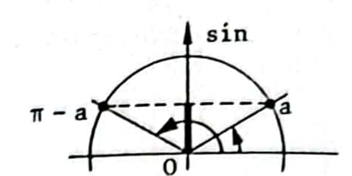
3° - EQUATIONS - FONCTIONS

Autant pour résoudre les équations suivantes que pour retrouver les variations des fonctions sin, cos, tg ou cotg, on peut s'aider de figures.



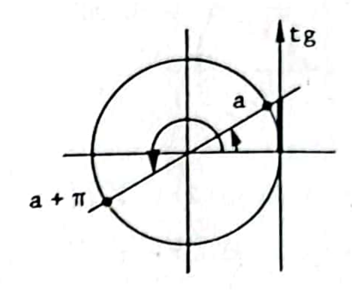
• $\cos x = \cos a$ (a donné ou cos a donné)

admet pour solutions : $\begin{cases} x = a \pmod{2\pi} \\ \text{ou } x = -a \pmod{2\pi} \end{cases}$



• $\sin x = \sin a$ (a ou sin a donné)

admet pour solutions : $\begin{cases} x = a \pmod{2\pi} \\ \text{ou } x = \pi - a \pmod{2\pi} \end{cases}$



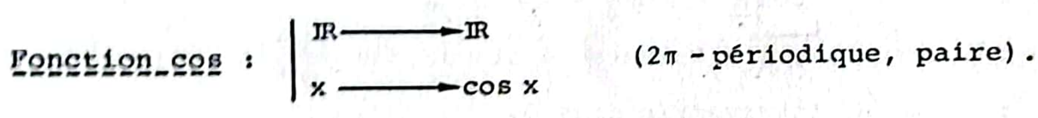
• $\text{tg}\, x = \text{tg}\, a$, de même admet les solutions :

$x = a \pmod{2\pi}$ ou $x = a + \pi \pmod{2\pi}$,

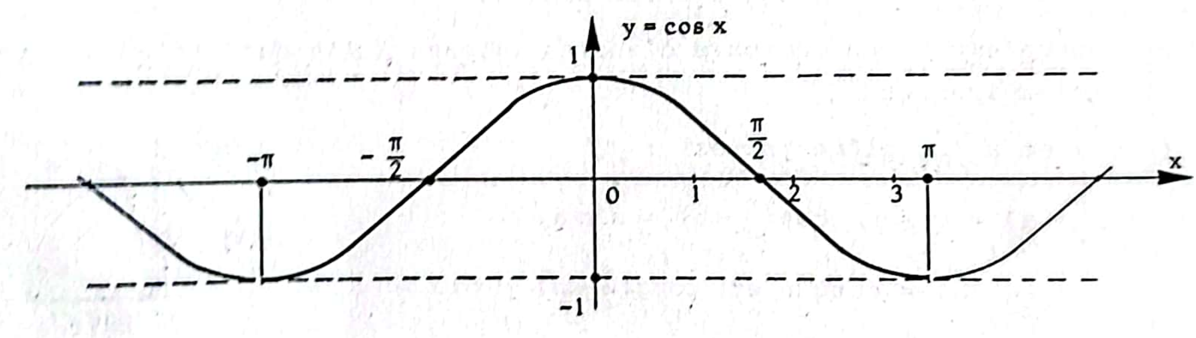
que l'on réunit en l'unique formule :

$x = a \pmod{\pi}$.

(bien remarquer l'équivalence modulo π).



Fonction cos : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \cos x \end{array} \right.$ (2π - périodique, paire).



Dérivées : $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$y = \cos u \Rightarrow y' = (-\sin u)\, u'$

Fonction sin : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sin x \end{array} \right.$ (2π - périodique, impaire)

Dérivées :

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$
$$y = \sin u \Rightarrow y' = (\cos u)\, u'$$

Fonction tg : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \text{tg}\, x \end{array} \right.$ (π - périodique, impaire, non définie pour $x = \frac{\pi}{2}$, mod π)

Dérivées :

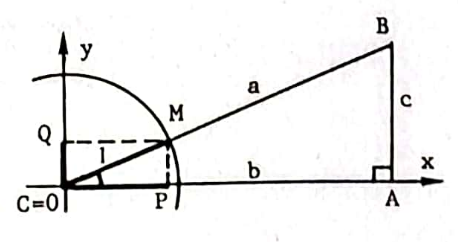
$$y = \text{tg}\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = (1 + \text{tg}^2 x)$$
$$y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \text{tg}^2 u)\, u'$$

Fonction cotg : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \text{cotg}\, x \end{array} \right.$ (π - périodique, impaire, non définie pour $x = 0$, mod π)

Dérivées :

$$y = \text{cotg}\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)$$
$$y = \text{cotg}\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -(1 + \text{cotg}^2 u)\, u'$$

4° - TRIANGLES RECTANGLES - PROJECTIONS



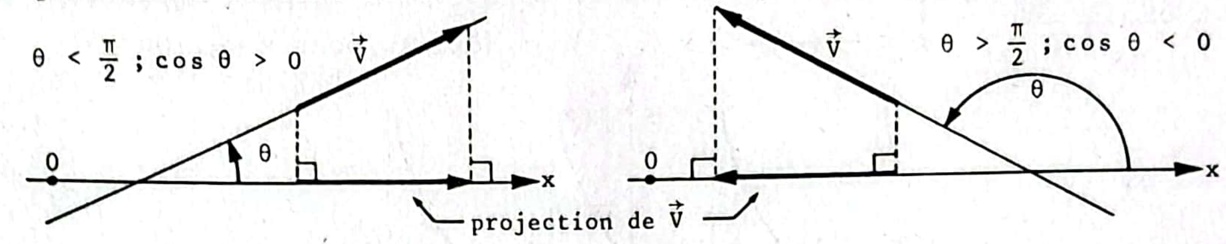
Soit le triangle ABC, rectangle en A ; on le place dans un repère trigonométrique, CA sur Ox, C en O, CB coupe le cercle en M, d'où la mise en évidence de CP = cos $\hat{C}$, CQ = sin $\hat{C}$. Par les triangles semblables ABC, PMC ou QCM, on retrouve les

relations trigonométriques du triangle rectangle :

- Un *côté* (de l'angle droit) est le produit de l'*hypoténuse* par :
  - le *sinus* de l'angle opposé, ($c = a \sin \hat{C}$)
  - ou le *cosinus* de l'angle adjacent, ($c = a \cos \hat{B}$).

- Un *côté* (de l'angle droit) est le produit de l'*autre* par :
  - la *tangente* de l'angle opposé, ($c = b \operatorname{tg} \hat{C}$)
  - la *cotangente* de l'angle adjacent, ($c = b \operatorname{cotg} \hat{B}$).

On généralise la 2ème relation ($c = a \cos \hat{B}$) à l'aide des schémas suivants :



D'où le *théorème des projections* :

> La *mesure algébrique de la projection* d'un vecteur $\vec{V}$ sur un axe Ox est égale à :
>
> $\|\vec{V}\| \cos\theta$, où θ est une mesure de $\widehat{\vec{Ox},\vec{V}}$.

REMARQUES :

- La norme $\|\vec{V}\|$ est euclidienne.
- En base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{V} = (X,Y)$ et $\vec{V}' = (X',Y')$, on rappelle que produit scalaire euclidien est $\vec{V}\cdot\vec{V}' = XX' + YY'$, donc la norme euclidienne est $\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}} = \sqrt{X^2+Y^2}$, de même $\|\vec{V}'\| = \sqrt{X'^2+Y'^2}$.
- On a alors : $\vec{V}\cdot\vec{V}' = \|\vec{V}\|\,\|\vec{V}'\| \cos(\widehat{\vec{V},\vec{V}'})$, et le théorème des projections devient : $X = \vec{V}\cdot\vec{i}$ ou $Y = \vec{V}\cdot\vec{j}$.

5° - FORMULES DIVERSES

Il est essentiel, en Mécanique, de retrouver facilement les formules telles que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, etc...

Formule fondamentale : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

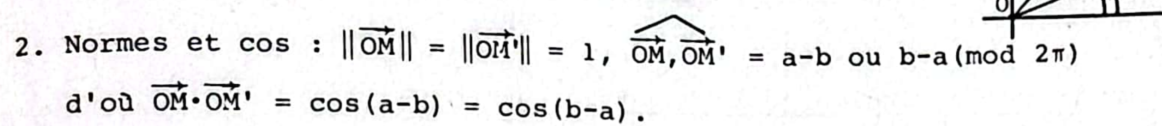
Preuve succincte : en exprimant $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}$ de 2 manières :

1. Composantes : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$

   d'où $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

2. Normes et cos : $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\| = 1$, $\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}} = a-b$ ou $b-a \pmod{2\pi}$

   d'où $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = \cos(a-b) = \cos(b-a)$.



La comparaison des 2 résultats donne la formule.

Conséquences : en changeant b en -b, ou en $\frac{\pi}{2} - b$, ou en $\frac{\pi}{2} + b$:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

En "arrangeant bien" $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, etc..., on trouve :

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

En supposant $b = a$ dans $\cos(a+b)$, etc..., on trouve :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Retenir aussi : $\underline{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$,

ou encore : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

En développant $\cos(2a + a)$, etc..., on obtient aisément :

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a, \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a, \ldots$$

<u>Formules en $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$</u> : on change 2a en a (et a en $\frac{a}{2}$) dans les cos 2a, sin 2a, tg 2a, en abrégeant $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ par t. On obtient :

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg} a = \frac{2t}{1-t^2}$$

<u>Sommes de cos, ou de sin</u> : dans $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$, on pose : $a + b = p$, $a - b = q$, d'où $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. De même pour les autres :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{cases}$$

Formules des triangles quelconques

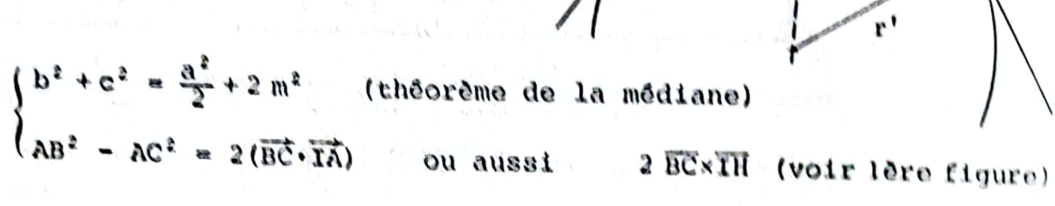
On note les angles : A,B,C ; les côtés opposés respectifs : a,b,c ; les rayons des cercles : circonscrit R ; inscrit r ; ex-inscrit dans A : r' ; les segments issus de A : hauteur h, médiane m, bissectrice ℓ. Surface du triangle : S. Périmètre : 2p = a + b + c.

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (et permutations circulaires)
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ (et permutations circulaires)
- $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{r'}{p}$
- $\ell = 2 \frac{bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$
- $S = \frac{1}{2} ah = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a) r'$

  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

A, c, b, m, ℓ, h, B, C, H, a = [BC], I = milieu de [BC]

A, R, r, B, C, r'



$$\begin{cases} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2\,m^2 & \text{(théorème de la médiane)} \\ AB^2 - AC^2 = 2(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA}) & \text{ou aussi} \quad 2\,\overline{BC} \times \overline{IH} \text{ (voir 1ère figure)} \end{cases}$$

CHAPITRE 2

VECTEURS - POINTS - COORDONNEES - TEMPS

Les notions rappelées dans ce chapitre sont adaptées à la réalité mécanique, donc en dimension 3.

1° - ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^3$

L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ est muni de deux lois, l'une interne, de type additif, notée +, et l'autre externe à l'aide du corps $\mathbb{R}$, sans notation.

On désigne les *vecteurs* (éléments de $\mathbb{R}^3$) par $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$ et les *scalaires* (éléments de $\mathbb{R}$) par $\lambda, \mu, \ldots$

DEFINITION :

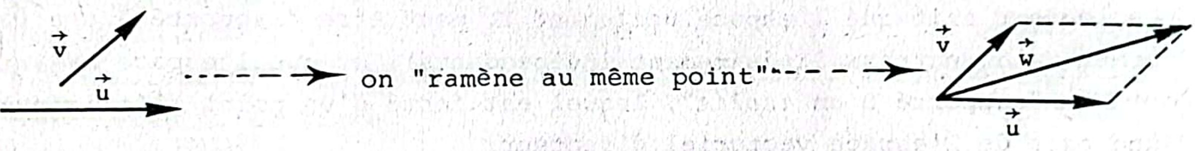
$\mathbb{R}^3$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont les lois sont :

1. La loi interne +, qui en fait un groupe abélien.
2. La loi externe (sans signe distinctif) qui vérifie pour tous scalaires et tous vecteurs :
   - $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ où $(\lambda\mu)$ est un produit dans $\mathbb{R}$
   - $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ distributivité
   - $\lambda\vec{u} + \mu\vec{u} = (\lambda+\mu)\vec{u}$ où $(\lambda+\mu)$ est une somme dans $\mathbb{R}$
   - $1\vec{u} = \vec{u}$ où 1 est l'unité de $\mathbb{R}$

COMPLEMENTS :

L'élément neutre pour + est le *vecteur nul* $\vec{0}$.

- L'addition se traduit par la règle du parallélogramme, un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ est $\vec{w}$, tel que sur le schéma.



2° - ESPACE AFFINE $\mathbb{R}^3$

On sait munir un ensemble $\mathscr{E}$ d'une loi externe à l'aide d'un espace vectoriel E (espace directeur de $\mathscr{E}$) de manière à structurer $\mathscr{E}$ en espace affine. En notant les *points* (éléments de $\mathscr{E}$) par M, P, Q, ... et les *vecteurs* (éléments de E) par $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$,

on considère la loi externe notée + $\left| \begin{array}{l} E \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E} \\ (\vec{u}, M) \longrightarrow M + \vec{u} \end{array} \right.$

DEFINITION :

$\mathscr{E}$ est un espace affine lorsque la loi externe vérifie les propriétés suivantes, pour tous points et tous vecteurs :

1. $(M+\vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u}+\vec{v})$ où $(\vec{u}+\vec{v})$ est une somme dans E.
2. $M + \vec{O} = M$ où $\vec{O}$ est le vecteur nul de E.
3. $\vec{O}$ est l'unique solution de : $M + \vec{x} = M$, $\forall M \in \mathscr{E}$.
4. Pour tout "bipoint" (P,Q) de $\mathscr{E}$, il existe un vecteur $\vec{u}$ (de E) tel que $Q = P + \vec{u}$, unique si P et Q sont fixés.

L'espace affine utile en Mécanique, au niveau de ce livre, est celui dans lequel nous vivons, avec ses 3 dimensions que l'on peut appeler longueur, largeur, hauteur en langage usuel. Par habitude, *on désigne cet espace par* $\mathbb{R}^3$, comme son espace vectoriel directeur ! Le lecteur ne devra pas se laisser troubler, et bien prendre garde de noter avec → les vecteurs du $\mathbb{R}^3$ vectoriel, puisque pour les points du $\mathbb{R}^3$ affine on ne peut se tromper.

COMPLEMENTS ET PROPRIETES :

- Dans $\mathbb{R}^3$ affine, on peut écrire $Q = P + \vec{u}$ (propriété 4) sous la forme $Q - P = \vec{u}$, ce qui conduit à convenir que $Q - P$ s'écrit aussi bien $\overrightarrow{PQ}$: c'est un "vecteur" dans un espace affine, on peut l'appeler un bipoint.

  Ainsi $\boxed{Q = P + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{u}}$

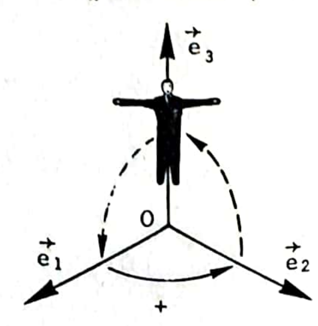
- D'où un certain nombre de propriétés :
  - $Q = P + \overrightarrow{PQ}$
  - $\overrightarrow{MM} = \vec{O}$
  - $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow P = Q$
  - $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}$ relation de Chasles

3° - BASES - REPERES - ORIENTATION

Le lecteur sait que l'espace *vectoriel* $\mathbb{R}^3$ peut être "rapporté à une *base*" (formée de 3 vecteurs linéairement indépendants), et que l'espace *affine* $\mathbb{R}^3$ peut être "rapporté à un *repère*", lequel est formé d'un point (l'origine) et d'une base de l'espace vectoriel directeur.

En Mécanique, au niveau de ce livre, toutes les bases et tous les repères sont *orthonormés et orientés*, sauf mention contraire. La norme est exclusivement la *norme euclidienne*, et l'orientation est celle "des physiciens", à savoir :

orientation des physiciens : pour une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ou le repère d'origine O correspondant, l'orientation positive de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ s'obtient en considérant un personnage traversé par $\vec{e}_3$ des pieds vers la tête : cette orientation est celle qui amène le bras droit sur le bras gauche du personnage (par devant lui, et non pas dans son dos !).



De même, on oriente $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec le personnage traversé par $\vec{e}_1$, et $(\vec{e}_3, \vec{e}_1)$ à l'aide de $\vec{e}_2$.

> L'orientation positive de l'espace va donc de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$, puis de $\vec{e}_2$ vers $\vec{e}_3$, puis de $\vec{e}_3$ vers $\vec{e}_1$ (on dit aussi : sens direct).

EXEMPLES :

voir 5° de ce chapitre, les bases ou repères *cartésiens*, *cylindriques*, *sphériques*, de *Frenet*.

4° - LE TEMPS

En évitant les considérations philosophiques, on a une notion intuitive de l'écoulement du temps, depuis une date (en général désignée par t = 0) appelée *instant initial*, et "vers +∞". On dit "le temps t", "l'instant t", "la date t" pour désigner une "date instantanée", sans préciser les unités employées (du moins pour la Mécanique du niveau de ce livre).

POSTULAT DU TEMPS :

Le temps *s'écoule uniformément* et il est *indépendant de toute influence*.

REMARQUE :

Ce postulat, valable au niveau de ce livre, est insuffisant en Mécanique relativiste (d'EINSTEIN) ou dans d'autres théories.

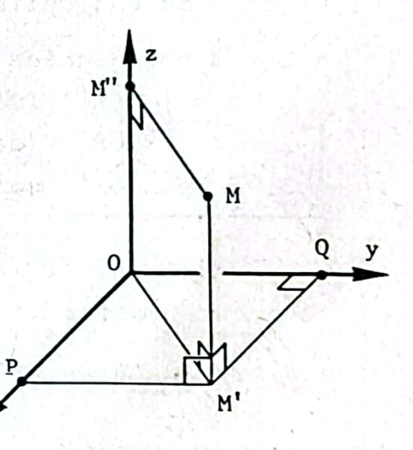
CONSEQUENCES :

Pour n'importe quel observateur, les phénomènes étudiés en Mécanique "classique" ou "rationnelle" (celle dont il est question dans ce livre) sont des fonctions d'un unique paramètre qui est le temps t. De plus, si 2 phénomènes sont simultanés pour un certain observateur, ils le sont encore pour tout autre observateur.

COMMENTAIRE :

Au sujet du temps, on peut dire tellement de choses qu'il a semblé préférable à l'auteur de s'en tenir aux rappels précédents, largement suffisants pour le niveau de ce livre.

5° - BASES, REPERES, COORDONNEES : CAS USUELS



CAS CARTESIEN :

On désigne par $\vec{e}_x$ (ou $\vec{x}$) le vecteur unitaire de l'axe $(O, \vec{e}_x)$ ou Ox ; de même pour $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$.

- La base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est, comme déjà dit, orthonormée (et orientée).
- Tout point M est projeté (orthogonalement) sur les axes (voir schéma), en P, Q, M".

- Les 3 coordonnées cartésiennes de M :
  1. *abscisse*, $\overline{OP}$: notée x ou x_M
  2. *ordonnée*, $\overline{OQ}$: notée y ou y_M
  3. *cote*, $\overline{OM''}$: notée z ou z_M
- Pour le *point* M, on écrit : $\underline{M = (x,y,z)}$ ou (x_M, y_M, z_M)
- Pour le *vecteur* $\overrightarrow{OM}$: $\underline{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$

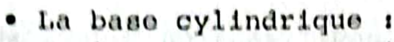
CAS_CYLINDRIQUE :

On part du cas cartésien, où l'on n'a besoin que de la projection M' de M sur $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ et de sa projection M" sur $(O,\vec{e}_z)$.

- Les 3 coordonnées cylindriques de M :
  1. $\rho = ||\overrightarrow{OM'}||$ (donc $\rho > 0$)
  2. $\theta = \widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}}$ (dans $[0,2\pi[$)
  3. $z = \overline{OM''}$ (comme cartésien)

- θ est la *longitude* de M, c'est-à-dire l'angle polaire de M' par rapport à Ox, dans le "plan des x, y".

- La base cylindrique :
  1. $\vec{e}_\rho$ unitaire de $\overrightarrow{OM'}$
  2. $\vec{e}_\theta$ déduit de $\vec{e}_\rho$ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ *dans* $\underline{xOy}$
  3. $\vec{e}_z$ comme cartésien



Cette base est orthonormée et orientée .

- Pour le *point* M, on écrit : $\underline{M = (\rho,\theta,z)}$
- Pour le *vecteur* $\overrightarrow{OM}$: $\underline{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z}$ (pas de θ !)
- Retour aux cartésiennes, par : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

  et réciproquement : $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, θ défini par $\begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{\rho}\\ \sin\theta = \frac{y}{\rho}\end{cases}$

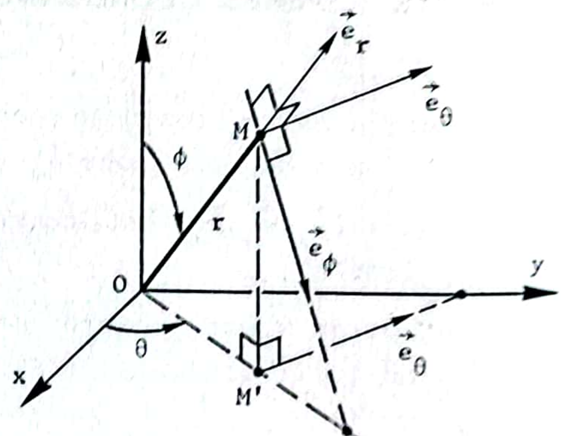
CAS_SPHERIQUE :

On part du cas cylindrique, où l'on n'a pas besoin de $\vec{e}_\rho$ en définitive.

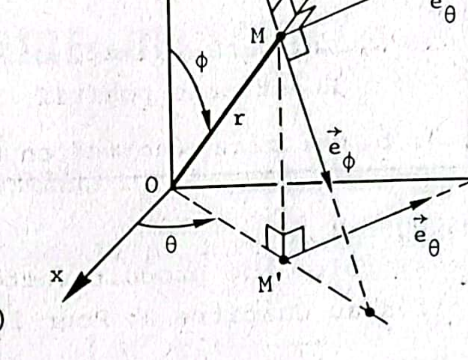
- Les 3 coordonnées sphériques de M :
  1. $r = ||\overrightarrow{OM}||$ (donc $r > 0$)
  2. $\phi = \widehat{\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM}}$ (dans $[0,\pi]$)
  3. $\theta = \widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM'}}$ comme cylindrique

- ϕ est la *colatitude* de M, comptée positivement "autour de $\vec{e}_\theta$".

- r est le *rayon vecteur* de M.



- La base sphérique :
  1. $\vec{e}_r$ unitaire de $\overrightarrow{OM}$
  2. $\vec{e}_\phi$ déduit de $\vec{e}_r$ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ *autour de* $\vec{e}_\Theta$
  3. $\vec{e}_\Theta$ comme en cylindrique



Cette base est orthonormée et orientée .

- Pour le *point* M, on écrit : $M = (r,\phi,\Theta)$
- Pour le *vecteur* $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$
  (pas de Θ ni de φ !)

- Retour aux cartésiennes, par :
  $x = r\sin\phi\cos\Theta$, $y = r\sin\phi\sin\Theta$, et $z = r\cos\phi$

  et réciproquement : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

  φ défini dans $[0,\pi]$ par $\cos\phi = \frac{z}{r}$

  Θ défini par $\begin{cases} \cos\Theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\Theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

CAS INTRINSEQUE, ou de FRENET :

On part des coordonnées cartésiennes (x,y,z) de M, supposées fonctions (2 fois dérivables) de la variable t.

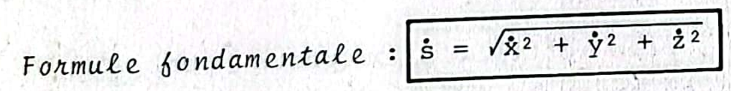
Lorsque t varie, M décrit une courbe C (dans l'espace) ; pour t = 0, M est au point A de C, ensuite M est supposé aller dans le même sens sur C.

On note $\widehat{AM}$ (arc parcouru depuis t = 0 jusqu'à t étudié), par s.

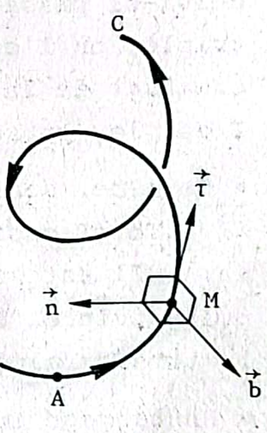
$\widehat{AM} = s$, *fonction de* t, est *l'abscisse curviligne* de M sur C .

On note $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{s}$ les dérivées par rapport à t (notation très employée en Mécanique).

Convention d'orientation de C : dans le sens où M la parcourt (étant entendu qu'on "recommence tout" si M change de sens de parcours). Alors, s est fonction croissante.



Formule fondamentale : $\boxed{\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$



Ainsi, $\dot{s} > 0$ et on respecte la convention : s↗

Convention d'écriture : $dM = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

c'est-à-dire que $\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ est traité comme si dM et dt pouvaient se dissocier, d'où $dM = \begin{pmatrix} \dot{x}\,dt \\ \dot{y}\,dt \\ \dot{z}\,dt \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ dans la base cartésienne.

• La base de FRENET (ou intrinsèque) :

1. $\vec{\tau}$, *unitaire tangent* en M à C, défini par $\vec{\tau} = \frac{dM}{ds} \equiv \frac{1}{\dot{s}}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$

2. $\vec{n}$, *unitaire normal* en M à C, défini par $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n}$, et par le fait que R est pris positif

3. $\vec{b}$, *unitaire binormal* en M à C, défini par $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

REMARQUES :

Le symbole $\wedge$ de produit vectoriel, ainsi que le calcul correspondant, sont rappelés au Chapitre 3. Pour les dérivations, voir Chapitre 4.

• Pour calculer $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, on effectue le calcul symbolisé par $\frac{1}{\dot{s}}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$; ensuite on a $\left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\| = \frac{1}{R}$ car $\vec{n}$ unitaire, on a donc R ; d'où enfin $\vec{n}$.

DERIVATIONS :

Toutes dérivations en base de Frenet sont faciles, à condition de retenir les *formules de Frenet* :

$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n}$ (R > 0)

$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} - \frac{1}{T}\vec{b}$ où T est positif ou négatif, selon la courbe étudiée

$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{T}\vec{n}$

On peut aussi bien écrire $\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} + \frac{1}{T}\vec{b}$ et $\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\vec{n}$, mais il semble que les formules encadrées soient les plus courantes.

INTERPRETATION DE R ET DE T :

• Le plan $(M,\vec{\tau},\vec{n})$ est appelé *plan osculateur* en M à C : dans ce plan, si l'on définit le point I par $\overrightarrow{MI} = R\vec{n}$, et si l'on trace le cercle (I,R), celui-ci passe évidemment par M : il est tangent en M à C par un point triple; on l'appelle *cercle osculateur* en M à C. R est appelé *rayon de courbure* de la courbe en M ; $\frac{1}{R}$ est appelé courbure de la courbe en M ; I est le centre de courbure de la courbe en M.

• De même, dans le plan $(M,\vec{\tau},\vec{b})$, *plan rectifiant*, on porte J tel que $\overrightarrow{MJ} = T\vec{b}$ (T positif ou négatif), on trace le cercle (J,|T|), *cercle de torsion*. Il est aussi tangent à la courbe en M, mais pas en général par un point triple. T est le *rayon algébrique de torsion* de la courbe en M, $\frac{1}{T}$ la torsion algébrique, J le centre de torsion.

• En langage imagé, on peut dire que, pour faire un morceau de courbe avec un fil de fer rectiligne, il y a 2 opérations :

1. "Courber" (avec un rayon R), en restant dans un certain plan.
2. "Tordre" (avec un rayon |T|), dans un plan perpendiculaire au précédent. Le signe de T précise de quel côté du plan précédent l'on doit tordre.

Et ceci, en tout point du fil de fer.

CHAPITRE 3

PRODUITS DE VECTEURS (SCALAIRE, VECTORIEL, ...)

1° - PRODUIT SCALAIRE (2 VECTEURS DONNENT 1 REEL)

Comme déjà dit, le produit scalaire utilisé est le produit scalaire *euclidien* (dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée B).

Signe correspondant : un point, d'où le schéma $\cdot \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) \longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} \end{array} \right.$

où $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est défini par l'une ou l'autre des formules suivantes :

1. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_B$ alors $\underline{\vec{u}\cdot\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'}$

2. $\underline{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})}$, où $\|\ \|$ est euclidienne.

PROPRIETES :

Ce sont les propriétés de tout produit scalaire, soit :

1. *Symétrie* (commutativité) : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. *Positivité* : $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$
   $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
3. *Bilinéarité*, "en $\vec{u}$" : $(\lambda\vec{u}+\vec{u}').\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) + (\vec{u}'.\vec{v})$
   "en $\vec{v}$" : $\vec{u}.(\lambda\vec{v}+\vec{v}') = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) + (\vec{u}.\vec{v}')$

Ces propriétés, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, tous scalaires λ.

RESULTATS UTILES :

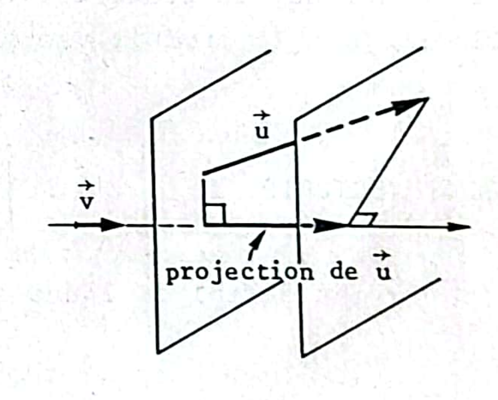
1. *Orthogonalité* : si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

2. *Projection* : la mesure algébrique de la projection de $\vec{u}$ sur un axe dirigé par $\vec{v}$, est donnée par :

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Remarquer que $\vec{u}$ et l'axe ne sont pas nécessairement dans un même plan affine.



EXEMPLES d'utilisation de produits scalaires :

Les bases déjà définies (cartésienne, cylindrique, sphérique, de Frenet) sont orthonormées, c'est-à-dire :

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ et $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$, de même avec $\vec{e}_y$ puis avec $\vec{e}_z$

De même en cylindriques : $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1$, $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = 0$ et $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0$, etc...

Et de même en sphériques, etc...

1. *Passage cylindrique → cartésienne.*

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\rho = \|\vec{e}_x\| \, \|\vec{e}_\rho\| \cos(\vec{e}_x, \vec{e}_\rho) = 1.1.\cos\theta = \cos\theta$

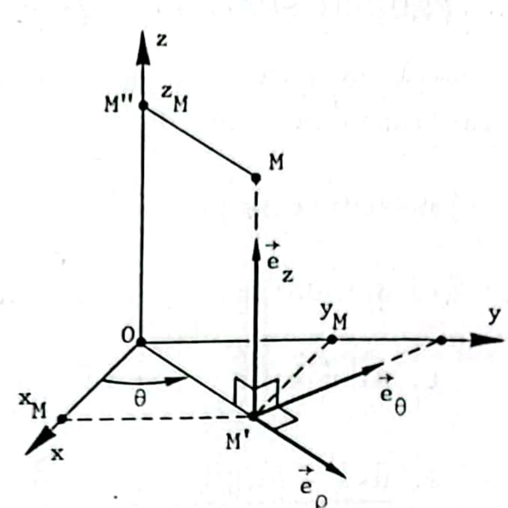
de même $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\rho = \sin\theta$ et $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0$

On sait que $x_M \equiv \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x$ d'où :

$x_M = (\rho \vec{e}_\rho + z_M \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x = \rho \cos\theta + z_M 0 = \rho \cos\theta$

de même, on retrouve $y_M = \rho \sin\theta$

$z_M = z_M$ (inchangé).



2. *Passage sphérique → cartésienne.*

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho = \|\vec{e}_r\| \, \|\vec{e}_\rho\| \cos(\vec{e}_r, \vec{e}_\rho) = 1.1.\cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$

d'où $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho = \sin\phi$. De même, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos\phi$

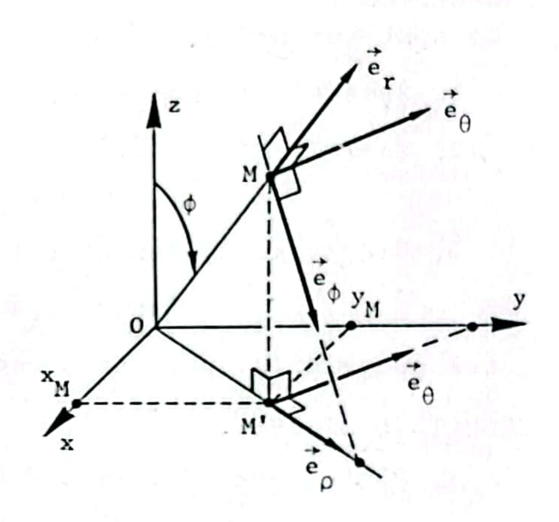
donc on peut écrire $\vec{e}_r = \sin\phi \, \vec{e}_\rho + \cos\phi \, \vec{e}_z$

d'où $\overrightarrow{OM} = r \, \vec{e}_r = r \sin\phi \, \vec{e}_\rho + r \cos\phi \, \vec{e}_z$

En comparant à $\rho \vec{e}_\rho + z_M \vec{e}_z$ on voit d'après 1 :

$x_M = r \sin\phi \cos\theta$, $y_M = r \sin\phi \sin\theta$

et directement : $z_M = r \cos\phi$



2° - PRODUIT VECTORIEL (2 VECTEURS DONNENT 1 VECTEUR)

En Mécanique, un produit *interne* (dans $\mathbb{R}^3$ vectoriel) s'est révélé très utile ; c'est le produit vectoriel, dont le signe est $\wedge$, d'où le schéma

PRODUIT VECTORIEL : $\wedge$: $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array} \right.$

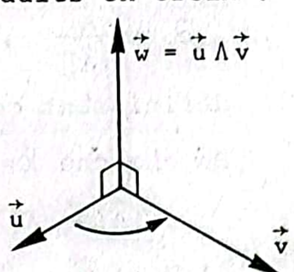
où $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini de l'une ou l'autre des façons suivantes :

1. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ dans une même base (orthonormée, orientée)

alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YZ' - ZY' \\ ZX' - XZ' \\ XY' - YX' \end{pmatrix}$ dans cette même base.

On dit qu'on a les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, par "produits en croix".

2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, vecteur défini par :



- Support orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- Sens tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit d'orientation identique à celle de l'espace.
- Norme, définie par $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|$.

PROPRIETES :

- $\wedge$ *n'est pas* associatif ; *il n'y a pas* de vecteur neutre pour $\wedge$; $\wedge$ *n'est pas* commutatif.
- $\wedge$ est *anti-commutatif* : $\underline{\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}}$ $\quad \forall \vec{u},\ \forall \vec{v}$
- Distributivités : $(\vec{u}+\vec{u}') \wedge \vec{v} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u}' \wedge \vec{v})$; de même à droite.
  $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; de même à droite.

RESULTATS UTILES :

1. *Colinéarité* : si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\vec{u} /\!/ \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \qquad (\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \vec{v} = \lambda\vec{u})$$

2. La norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|$ représente une mesure de l'aire du parallélogramme "décrit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$".

EVIDENCES :

En base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ orthonormée orientée, on a :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3\ ,\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

et par anti-commutativité : $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, etc...

3° - « DIVISION VECTORIELLE »

Malgré l'absence de neutre, donc de symétrique, pour $\wedge$, on a coutume d'appeler *division vectorielle*, l'opération suivante :

trouver les $\vec{X}$ *vérifiant* $\underline{\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}}$ $(\vec{A}, \vec{B}$ donnés).

1. Cas sans intérêt en Mécanique :
   - Si $\vec{A}=\vec{0}$ et si $\vec{B}\neq\vec{0}$: $\vec{0} \wedge \vec{X} = \vec{B}$ est contradictoire, pas de solution.
   - Si $\vec{A}\neq\vec{0}$ et si $\vec{B}=\vec{0}$: $\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{0}$ donne : $\vec{X} = \lambda\vec{A}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   - Si $\vec{A}=\vec{0}$ et si $\vec{B}=\vec{0}$: $\vec{0} \wedge \vec{X} = \vec{0}$ donne : tout $\vec{X}$ est solution.

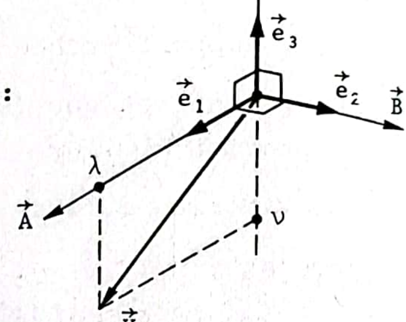
• Enfin si $\vec{A} \neq \vec{O}$ et si $\vec{B} \neq \vec{O}$, avec $\vec{A}\cdot\vec{B} \neq 0$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas orthogonaux ; or $\vec{A} \wedge \vec{X}$ est au moins orthogonal à $\vec{A}$, il ne peut être égal à $\vec{B}$, donc pas de solution.

2. *Cas "général"* : $\vec{A} \neq \vec{O}$, $\vec{B} \neq \vec{O}$, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ ou $\vec{A} \perp \vec{B}$

Alors $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ est une base orthogonale, d'où une base orthonormée peut être tirée :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}$$

définissent cette base.



On cherche $\vec{X} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \nu\vec{e}_3$, l'équation devient:

$$\|\vec{A}\|\,\vec{e}_1 \wedge [\lambda\,\vec{e}_1 + \mu\,\vec{e}_2 + \nu\,\vec{e}_3] = \|\vec{B}\|\,\vec{e}_2$$

d'où : $\vec{O} + \mu\|\vec{A}\|\,\vec{e}_3 - \nu\|\vec{A}\|\,\vec{e}_2 = \|\vec{B}\|\,\vec{e}_2$

ce qui fournit : λ quelconque, $\mu = 0$, $\nu = \dfrac{-\|\vec{B}\|}{\|\vec{A}\|}$

d'où les *solutions* : $\vec{X} = \lambda\dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} - \dfrac{1}{\|\vec{A}\|^2}\,\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.

• Si on "ramène tout à un même point", l'extrémité des $\vec{X}$ est un point quelconque de la droite // à $\vec{A}$, "coupant $\vec{A}\wedge\vec{B}$ en $\nu = \dfrac{-\|\vec{B}\|}{\|\vec{A}\|}$ ".

4° - PRODUIT MIXTE (3 VECTEURS DONNENT 1 REEL)

DEFINITION :

Le *produit mixte* des 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (dans cet ordre) est le *réel*

noté $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et défini par $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$

CALCUL :

Soit d'après les définitions, soit directement par :

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \text{dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} X & X' & X'' \\ Y & Y' & Y'' \\ Z & Z' & Z'' \end{vmatrix}$$

où X, Y, Z sont les composantes de $\vec{u}$, etc...

PROPRIETES :

Celles des déterminants (permutations de lignes, de colonnes,...).

RESULTATS UTILES :

1. *Vecteur coplanaires* : si $\vec{u} \neq \vec{O}$, si $\vec{v} \neq \vec{O}$ et si $\vec{w} \neq \vec{O}$, on a :

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

ou aussi : $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$: $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

2. Géométriquement, le produit mixte $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ représente une mesure algébrique du volume du parallélipipède "décrit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$".

5° - DOUBLE PRODUIT VECTORIEL (3 VECTEURS DONNENT 1 VECTEUR)

DEFINITION :

Le *double produit vectoriel* des 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (dans cet ordre) est le *vecteur* défini par $\underline{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})}$.

CALCUL :

Soit d'après les définitions par composantes (produits en croix)

Soit par les autres définitions, on voit qu'on a :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \equiv (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$$

Retenir : $1 \wedge (2 \wedge 3) \equiv (1.3)2 - (1.2)3$

Interprétation : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est un *vecteur du plan* $(\vec{v},\vec{w})$.

EXERCICE : preuve "géométrique" de la formule précédente :

1. $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur $\vec{A}$: $\vec{A} \perp \vec{v}$, $\vec{A} \perp \vec{w}$, par définition.
2. $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est aussi $\vec{u} \wedge \vec{A}$, c'est donc un vecteur final $\vec{F}$, avec $\vec{F} \perp \vec{A}$, $\vec{F} \perp \vec{u}$, par définition.
3. Il y a donc 3 vecteurs orthogonaux à $\vec{A}$: $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{F}$, donc ils sont coplanaires, d'où λ et μ réels, tels que $\vec{F} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, c'est-à-dire : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.
4. Calcul de λ et μ : n'ayant pas utilisé le fait que $\vec{F} \perp \vec{u}$, utilisons-le maintenant : $\vec{F} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{F} = 0$,
   autrement dit : $\vec{u}.(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = 0$, $\lambda(\vec{u}.\vec{v}) + \mu(\vec{u}.\vec{w}) = 0$
   ce qui signifie : λ et μ proportionnels (respectivement) à $(\vec{u}.\vec{w})$ et $-(\vec{u}.\vec{v})$.
   Donc on peut écrire : $\mu = -k(\vec{u}.\vec{v})$ et $\lambda = k(\vec{u}.\vec{w})$,
   autrement dit : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = k[(\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}]$.
5. Il reste à calculer le réel k, qui est visiblement unique, donc il suffit d'un exemple particulier.
   Avec $\vec{e}_x \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y)$, on a :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{soit} & \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \text{ d'où } \vec{e}_y \\ \text{soit} & k[0\,\vec{e}_x - 1\,\vec{e}_y] \text{ d'où } k\,\vec{e}_y \end{array}\right\} \text{d'où } k = 1, \text{ cqfd.}$$

CHAPITRE 4

DERIVATIONS - GRADIENT - ROTATIONNEL

PRELIMINAIRES:

En Mécanique, il est essentiel de ne pas confondre les fonctions scalaires avec les fonctions vectorielles, notamment lorsqu'on les dérive. De plus, les diverses fonctions, en général, dépendent de plusieurs variables, on doit donc veiller à éviter toutes confusions.

1° - DERIVEES DES FONCTIONS SCALAIRES

FONCTIONS SCALAIRES : fonctions à valeurs réelles (ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$)

En Mécanique, fonctions de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$, dans $\mathbb{R}$, de types respectifs :

$$f(t),\ f(x,t),\ f(x,y,t) \text{ ou } f(x,y,z,t)$$

On expose le cas à 3 variables, le lecteur l'adaptera sans aucune difficulté à 2, 4 (ou même plus) variables, étant entendu qu'il connaît le cas des fonctions d'une seule variable.

FONCTIONS DE LA MECANIQUE :

Pendant une phase de mouvement, les accélérations se traduisent par des dérivées 2° (voir chap. 5) ; donc on suppose les fonctions dérivables 2 fois au moins ; elles possèdent alors des dérivées 1° continues et elles-mêmes sont continues.

DERIVEES PARTIELLES :

Par extension des notions élémentaires de nombre dérivé, puis de fonction dérivée, on définit :

- *dérivée partielle par rapport à* x, de $f(x,y,t)$:
  limite quand h tend vers 0 (si elle existe, si elle est finie), du rapport

$$r_x(h) = \frac{f(x+h,y,t) - f(x,y,t)}{h}$$

Notation : $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x

- *dérivée partielle par rapport à* y, de $f(x,y,t)$:
  de même avec $r_y(h) = \frac{f(x,y+h,t) - f(x,y,t)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou f'_y

- *dérivée partielle par rapport à* t, de $f(x,y,t)$:
  de même avec $r_t(h) = \frac{f(x,y,t+h) - f(x,y,t)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ ou f'_t

CALCULS PRATIQUES :

On remarque dans les définitions que seule la variable par rapport à laquelle on dérive est à considérer.

Donc on considère les autres variables comme des constantes lors du calcul, et on est ramené aux formules usuelles de dérivation.

EXEMPLE :

Avec $f(x,y,t) = x^2 \cos y + t^3 x - \frac{t}{y}$, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y + t^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y + \frac{t}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 3t^2 x - \frac{1}{y}$$

DERIVEES PARTIELLES SECONDES (d'ordre 2) :

Les précédentes dérivées (premières, d'ordre 1) peuvent se dériver, chacune donnant 3 dérivées secondes.

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ (ou f'_x) donne : 1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (ou f''_{x^2})

  2. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ (ou f''_{xy})

  3. $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial t}$ (ou f''_{xt})

- $\frac{\partial f}{\partial y}$ donne de même : $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial t}$ (ou f''_{yx}, f''_{y^2}, f''_{yt})

- $\frac{\partial f}{\partial t}$ donne de même : $\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ (ou f''_{tx}, f''_{ty}, f''_{t^2})

SUITE DE L'EXEMPLE PRECEDENT :

On obtient :

$$f''_{x^2} = 2 \cos y \qquad f''_{xy} = -2x \sin y \qquad f''_{xt} = 3t^2$$

$$f''_{yx} = -2x \sin y \qquad f''_{y^2} = -x^2 \cos y - \frac{2t}{y^3} \qquad f''_{yt} = \frac{1}{y^2}$$

$$f''_{tx} = 3t^2 \qquad f''_{ty} = \frac{1}{y^2} \qquad f''_{t^2} = 6t\,x$$

THEOREME DE SCHWARZ :

$$f''_{yx} = f''_{xy}, \quad f''_{tx} = f''_{xt}, \quad f''_{yt} = f''_{ty}$$

Autrement dit : les dérivées partielles sont indépendantes de l'ordre dans lequel on les effectue, (cela reste vrai pour les dérivées d'ordre 3, 4, ... qui n'interviennent pratiquement jamais en Mécanique usuelle).

FONCTIONS COMPOSEES :

Par exemple, si x et y sont fonctions de t dans $f(x,y,t)$, on obtient une fonction de t seul, laquelle fonction possède une dérivée. Cette dérivée est dite *dérivée totale* (ou particulaire), de $f(x,y,t)$ on la note $\frac{df}{dt}$ (ne pas confondre avec $\frac{\partial f}{\partial t}$). On note aussi $\dot{f}$ la dérivée totale.

Calcul : appliquer la formule $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$, ou mieux, en notant $\dot{x}$, $\dot{y}$ pour les dérivées de $x(t)$, $y(t)$:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}}$$

Exemple : si $f(x,y,t) = \frac{xy}{t}$, si x et y sont fonctions de t, alors :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{xy}{t^2} + \frac{y}{t}\dot{x} + \frac{x}{t}\dot{y}$$

Evidemment, si l'on connaît vraiment x(t) et y(t), la formule semble inutile ; elle a cependant une grande importance théorique.

Vérification pour $x(t) = t$, $y(t) = t^2$: $f(x,y,t)$ devient t^2, $\frac{df}{dt} = 2t$, et la formule donne : $t \times 1 + 1 \times 2t - \frac{t^3}{t^2}$, c'est bien 2t.

2° - DERIVEES DES FONCTIONS VECTORIELLES (de t)

Fonction vectorielle de t : de type $\vec{u}$: $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{ou } \mathbb{R}^2) \\ t \longrightarrow \vec{u}(t) \end{array} \right.$

En Mécanique, on rencontre aussi les cas suivants :

1. En espace affine, d'origine O par exemple, avec un point M qui varie en fonction de t : la fonction "vectorielle" $\overrightarrow{OM}(t)$.
2. De même, avec 2 points P(t) et Q(t) : la fonction $\overrightarrow{PQ}(t)$ qu'on ramènera souvent à $\overrightarrow{OQ}(t) - \overrightarrow{OP}(t)$.

> *Extrêmement important* : les dérivées des fonctions vectorielles du temps t *dépendent des bases* (tandis que cela n'intervient pas pour les fonctions scalaires).

CONSEQUENCE :

L'écriture d'une dérivée de fonction vectorielle de t, doit *obligatoirement comporter une indication de base*, à moins qu'il n'y ait aucun doute possible.

DEFINITION :

> La dérivée de $\vec{u}(t)$ dans la base B, notée par exemple $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B$ a pour composantes dans B les dérivées respectives des composantes dans B de $\vec{u}(t)$.

Si l'on a par exemple $\vec{u}(\theta(t), \phi(t), t)$, alors il s'agit de dérivée totale, dans la définition précédente.

EXEMPLE PLAN :

Soient 2 repères (orthonormés) $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $R_1 = (O, \vec{u}, \vec{v})$, de bases respectives $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $B_1 = (\vec{u}, \vec{v})$. On Suppose $\widehat{\vec{e}_x, \vec{u}} = \theta(t)$.

On peut écrire :

1. $\vec{u} = \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y$ dans B

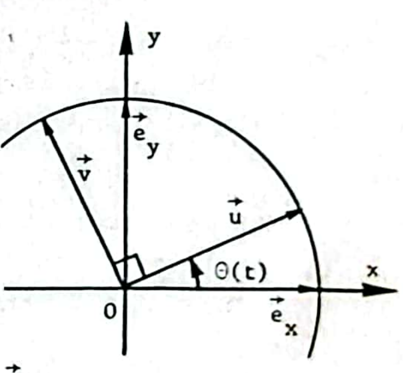
   d'où : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_x + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_y$

2. $\vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$ dans B_1

   d'où : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{B_1} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$, c'est-à-dire $\vec{0}$

3. De même, on voit :

   $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = -\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_x - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_y \qquad \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{B_1} = \vec{0}$



1er THEOREME FONDAMENTAL DE DERIVATION :

• Si $\vec{u}$ est unitaire, si $\vec{u}$ est fonction seulement de son angle polaire $\Theta(t)$ dans la base B, alors $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{u}}{d\Theta}\right)_B \times \frac{d\Theta}{dt}$, et $\left(\frac{d\vec{u}}{d\Theta}\right)_B$ est le vecteur déduit de $\vec{u}$ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan de son angle polaire Θ.

Preuve : l'exemple précédent sert de preuve, car visiblement l'on a

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = (-\sin\Theta\,\vec{e}_x + \cos\Theta\,\vec{e}_y)\frac{d\Theta}{dt} \equiv \vec{v}\frac{d\Theta}{dt}$$

Convention : pour les fonctions scalaires de t, la dérivée (et éventuellement la dérivée totale "par rapport à t") se note par un point surmontant la fonction.

Ainsi, $\frac{d\Theta}{dt}$ se note $\dot{\Theta}$, etc ...

Conséquences : on écrira, dans l'exemple précédent :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = \dot{\Theta}\,\vec{v} \;;\; \text{de même, on voit : } \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = -\dot{\Theta}\,\vec{u}$$

2ème THEOREME FONDAMENTAL DE DERIVATION :

• Si $\vec{u}$ est unitaire, si $\vec{u}$ dépend de 2 angles $\Theta(t)$, $\phi(t)$ dans la base B,

alors $$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\Theta}\right)_B \times \dot{\Theta} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\phi}\right)_B \times \dot{\phi}$$

et la dérivée partielle $\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\Theta}\right)_B$ est déduite de la projection de $\vec{u}$ dans le plan de l'angle Θ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans ce plan ; de même, pour obtenir $\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\phi}\right)_B$ projeter $\vec{u}$ dans le plan de ϕ et faire tourner cette projection de $+\frac{\pi}{2}$ dans ce plan.

EXEMPLE :

Dérivation des vecteurs de la base sphérique, dans la base cartésienne.

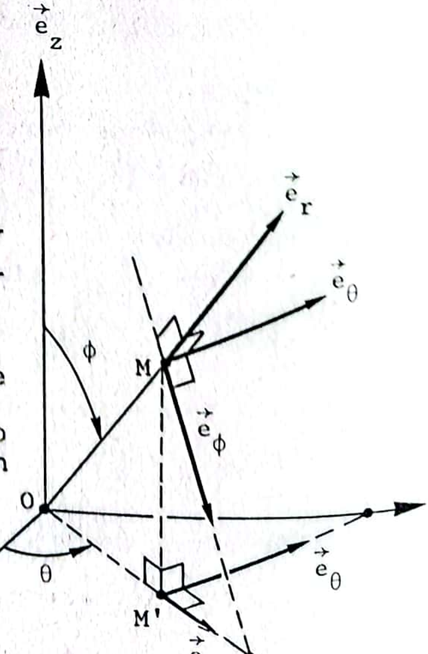
Le schéma rappelle les définitions et notations.

La base cartésienne est $B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; on utilise la notation $\dot{\Theta}$ (ou $\dot{\phi}$) pour $\frac{d\Theta}{dt}$ (ou $\frac{d\phi}{dt}$).

1. $$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_B = \dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \sin\phi\,\dot{\Theta}\,\vec{e}_\Theta$$

Preuve : $\left(\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}\right)_B = \vec{e}_\phi$ car $\vec{e}_r$ est sa propre projection dans le plan de ϕ, où la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ l'amène en $\vec{e}_\phi$.

$\left(\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\Theta}\right)_B = \sin\phi\,\vec{e}_\Theta$ car la projection de $\vec{e}_r$ dans le plan de Θ (plan des x,y) est $\sin\phi\,\vec{e}_\rho$ et la rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans ce plan l'amène en $\sin\phi\,\vec{e}_\Theta$. Le 2ème théorème donne le résultat.



2. De même : $\left(\frac{d\vec{e}_\phi}{dt}\right)_B = -\dot{\phi}\,\vec{e}_r + \cos\phi\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

3. De même : $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_B = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho$ (car $\vec{e}_\theta$ est fonction de θ seulement) et en projetant dans la base sphérique :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_B = -\sin\phi\,\dot{\theta}\,\vec{e}_r - \cos\phi\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\phi$$

Extrêmement important : $\left(\frac{d}{dt}\right)_B$ n'impose pas d'expliciter le résultat dans la base B de dérivation : le résultat est explicitable dans n'importe quelle base, comme le montre l'exemple précédent.

3° - COMPLEMENTS SUR LES DERIVATIONS

1. *Dérivée d'un bipoint* $\overrightarrow{OM}(t)$

- Soit (O,B_0) le repère dont la base est $B_0 = (\vec{u}_0,\vec{v}_0,\vec{w}_0)$, soit aussi (O,B_1) le repère (de même origine) dont la base est $B_1 = (\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{w}_1)$
- Soit $\overrightarrow{OM} = x_1\,\vec{u}_1 + y_1\,\vec{v}_1 + z_1\,\vec{w}_1$, fonction de t, et soit à calculer $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{B_0}$.
- Il est fort déconseillé de projeter $\overrightarrow{OM}$ dans B_0, d'où, par application de la définition, de dériver les composantes dans B_0.
- On écrit : $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{B_0} = \dot{x}_1\vec{u}_1 + \dot{y}_1\vec{v}_1 + \dot{z}_1\vec{w}_1 + x_1\left(\frac{d\vec{u}_1}{dt}\right)_{B_0} + y_1\left(\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right)_{B_0} + z_1\left(\frac{d\vec{w}_1}{dt}\right)_{B_0}$
- Ainsi, on est toujours ramené à des dérivées de vecteurs unitaires, c'est-à-dire aux 1er ou 2ème théorèmes fondamentaux précédents.

2. *Rappel de la convention des dérivées totales (par rapport à t)*

Pour les fonctions scalaires, la dérivée totale se désigne par la fonction surmontée d'un point ; *exemples* : $\frac{d\theta}{dt}$ s'écrit $\dot{\theta}$, $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$, ...
De même, pour les dérivées totales d'ordre 2 : $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ s'écrit $\ddot{\theta}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ s'écrit $\ddot{x}$, etc...

3. *Formules diverses, dont certaines ont déjà été utilisées*

$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{u})_B = \dot{\lambda}\vec{u} + \lambda\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B \qquad \lambda = \text{fonction scalaire de } t$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B \qquad B = \text{base quelconque dans ce cas}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\wedge\vec{v})_B = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B \qquad \text{Ne pas commuter !}$$

Si f est composée, $f\{g[h(t)]\}$, alors : $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\times\frac{dg}{dh}\times\frac{dh}{dt}$

Si $\vec{u}$ est composée, $\vec{u}\{g[h(t)]\}$, alors : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{u}}{dg}\right)_B\times\frac{dg}{dh}\times\frac{dh}{dt}$

Si f ou $\vec{u}$ sont fonctions de plusieurs variables, elles-mêmes étant fonctions de t, alors :

pour f(x,y,z,t) : $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}$

pour $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,t)$: $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_B = \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)_B + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\alpha}\right)_B\dot{\alpha} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\beta}\right)_B\dot{\beta} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\gamma}\right)_B\dot{\gamma}$

4° - GRADIENT - ROTATIONNEL

HYPOTHESE :

Repère *cartésien* $R = (O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ (orthonormé, orienté) point M, ou "vecteur" $\overrightarrow{OM}$, défini dans R par (x,y,z) et supposé fonction de t.

GRADIENT, OU VECTEUR GRADIENT, D'UNE FONCTION SCALAIRE :

- Soit de plus f, fonction scalaire de M, c'est-à-dire de x, y, z (et éventuellement de t explicitement en plus) f(x,y,z,t).

Définition : le gradient de f, noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, est le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Exemple : $f(x,y,z,t) = x^2y + 5xz + t^2$ donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = (2xy+5z)\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + 5x\,\vec{e}_z$$

ROTATIONNEL, OU VECTEUR ROTATIONNEL, D'UNE FONCTION VECTORIELLE :

- Soit de plus $\vec{V}$, fonction vectorielle de M, c'est-à-dire de x, y, z (et éventuellement de t explicitement en plus) $\vec{V}(x,y,z,t)$; soit alors $\vec{V} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z$ (avec X, Y, Z fonctions de x, y, z, t, chacune).

Définition : le rotationnel de $\vec{V}$, noté $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$, est le vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Calcul pratique : par le "produit vectoriel symbolique" suivant :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}_R \text{, qui donne bien } \begin{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\end{pmatrix}_R$$

Exemple : $\vec{V}(x,y,z,t) = (xyz)\vec{e}_x + (t^2 + \frac{y}{z})\vec{e}_y + (txz)\vec{e}_z$ donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{+y}{z^2}\right)\vec{e}_x + (xy - tz)\vec{e}_y + (-xz)\vec{e}_z$$

CAS NON CARTESIENS :

- En cylindriques, $f(\rho,\theta,z,t)$ donne $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

- En sphériques, $f(r,\phi,\Theta,t)$ donne $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \Theta}\vec{e}_\Theta$ (avec le même Θ qu'en cylindriques).
- Pour les $\overrightarrow{\text{rot}}$, formules hors du niveau de ce livre.

CHAPITRE 5

CINEMATIQUE DU POINT COMPOSITION DES MOUVEMENTS

PRELIMINAIRES :

La *cinématique* est l'étude des mouvements, sans souci de ce qui les cause. Le *point* n'a pas d'existence matérielle, mais dans certains phénomènes on admet qu'un objet "petit par rapport à ce phénomène" peut être remplacé par un point (en première approximation).

1° - VITESSE ET ACCELERATION D'UN POINT PAR RAPPORT A UN REPERE

Point mobile dans un repère R : point dont une (au moins) des coordonnées dans R est fonction (non constante) du temps t.

Point fixe dans un repère R : point dont toutes les coordonnées dans R sont des constantes. *On symbolise "M est fixe dans R" par :* $M \in R$.

DEFINITIONS RELATIVES A LA VITESSE :

Si M est mobile dans le repère R, de base B,

- *Le vecteur vitesse de* M *par rapport à* R, *noté* $\vec{V}_R(M)$ *ou* $\vec{V}(M/R)$

est défini par : $$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_B \quad \text{où } A \in R \quad (A \text{ fixe dans } R)$$

- La *vitesse scalaire*, ou *vitesse numérique*, de M par rapport à R, est définie par $\|\vec{V}(M/R)\|$ ou parfois l'opposée.

REMARQUES :

Au lieu de "vecteur-vitesse", on dit souvent : vitesse.

Au lieu de $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_B$ on écrit souvent $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_R$ le lecteur doit admettre cette "simplification".

Important :

Comme déjà dit, $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R \text{ ou } B}$ peut s'expliciter dans toute autre base que B. On peut même dire que, dans presque tous les problèmes, on a intérêt à l'expliciter dans une autre base que B, (d'après les théorèmes fondamentaux de dérivation et non pas d'après la définition).

DEFINITIONS RELATIVES A L'ACCELERATION :

dans les mêmes conditions que pour définir la vitesse,

- *Le vecteur accélération de* M *par rapport à* R, *noté* $\vec{\Gamma}(M/R)$ *ou* $\vec{\Gamma}_R(M)$

est défini par : $$\vec{\Gamma}(M/R) = \left(\frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_B$$

. L'*accélération scalaire*, ou *accélération numérique*, de M par rapport à R, est définie par $\|\vec{\Gamma}(M/R)\|$ ou parfois l'opposée.

REMARQUES :

Au lieu de "vecteur accélération", on dit souvent : accélération.

Au lieu de $\left(\frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_B$ on écrit souvent $\left(\frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R$ mais le lecteur doit s'habituer à cette "simplification".

Comme pour $\vec{V}(M/R)$, $\vec{\Gamma}(M/R)$ peut s'expliciter dans toute autre base que celle de R.

2° - FORMULES USUELLES DE VITESSES ET D'ACCELERATIONS

HYPOTHESES ET NOTATIONS :

Le repère par rapport auquel M est en mouvement est $R = (O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ cartésien. Les dérivations seront donc de type $\left(\frac{d}{dt}\right)_R$ (on écrit l'indice R, il s'agit en fait de la base de R).

CAS CARTESIEN :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ donne, par la définition de $\left(\frac{d}{dt}\right)_R$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z \qquad \vec{\Gamma}(M/R) = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

CAS CYLINDRIQUE :

$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$ donne, à l'aide du 1er théorème de dérivation

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\Gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

CAS SPHERIQUE :

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ donne, à l'aide aussi du 2° théorème de dérivation

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\sin\phi\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$ (les mêmes θ et $\vec{e}_\theta$ qu'en cylindrique)

$$\vec{\Gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2)\vec{e}_\phi + (r\sin\phi\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\sin\phi\,\dot{\theta} + 2r\cos\phi\,\dot{\phi}\,\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

CAS INTRINSEQUE (de Frenet) :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{s}\,\vec{\tau} \qquad \vec{\Gamma}(M/R) = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{n}$$

ρ désignant le rayon de courbure en M. La *vitesse* est toujours *tangentielle*.

3° - VOCABULAIRE DE LA CINEMATIQUE

- M *fixe* dans le repère R : toutes coordonnées de M dans R, constantes.
- M *mobile* dans le repère R : une des coordonnées au moins, de M dans R, est fonction non constante du temps t.
- En *cylindrique*, $\vec{V}(M/R)$ est de type $V_\rho\,\vec{e}_\rho + V_\theta\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$

  $\vec{\Gamma}(M/R)$ est de type $\Gamma_\rho\,\vec{e}_\rho + \Gamma_\theta\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

V_ρ est appelée *composante radiale* de la vitesse, V_Θ *composante transverse.*
Γ_ρ est appelée *composante radiale* de l'accélération, Γ_Θ *composante transverse.*

- En *intrinsèque*, $\vec{V}(M/R) = \dot{s}\,\vec{\tau}$ se note aussi $v\,\vec{\tau}$, d'où $\vec{\Gamma}(M/R) = \dot{v}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$

  $\dot{s}$ ou v est la vitesse scalaire, et $\vec{V}$ *est portée par la tangente* $\vec{\tau}$,
  $\ddot{s}$ ou $\dot{v}$ est la *composante tangentielle* de l'accélération,
  $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$ ou $\frac{v^2}{\rho}$ la *composante normale* de l'accélération.

REMARQUE :

Ne pas confondre Γ_ρ et Γ_Θ portées sur $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\Theta$ avec $\Gamma_\tau = \ddot{s} = \dot{v}$ et $\Gamma_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$ qui sont portées sur $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

- *Trajectoire d'un point M dans un repère R* : courbe décrite par M lorsque ses coordonnées dans R varient en fonction de t.

  . Pour étudier et tracer une trajectoire, on peut étudier chaque coordonnée en fonction de t, puis "regrouper" les résultats, mais on peut essayer aussi d'éliminer t entre les coordonnées afin d'obtenir des équations de type $y = f(x)$, $\rho = f(\Theta)$, $z = f(x,y)$, etc...

- *Hodographe d'un mouvement*: On peut compléter l'étude d'un mouvement (M/R) par le procédé suivant : choix d'un point $A \in R$ (A fixe dans R) et tracé de la courbe (trajectoire de P) définie par $\overrightarrow{AP} = \vec{V}(M/R)$. Cette courbe est appelée *hodographe* du mouvement de M par rapport à R, ou *indicatrice des vitesses* (de ce mouvement). Evident : $\vec{V}(P/R) \equiv \vec{\Gamma}(M/R)$.

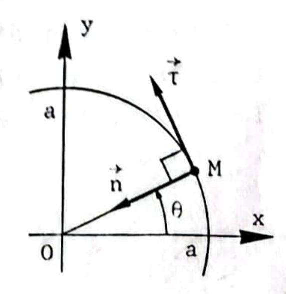
- *Types classiques de mouvements.*

  D'après les trajectoires :
  . mouvement sur une *droite* = mouvement *rectiligne*.
  . mouvement dans un *plan* = mouvement *plan*.
  . mouvement sur une *courbe* = mouvement *curviligne*.
  . mouvement sur un *cercle* = mouvement *circulaire*.

  D'après $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$:
  . *mouvement accéléré* $\Leftrightarrow$ $\vec{V}\cdot\vec{\Gamma} > 0$ $(\forall t)$ ou bien $\|\vec{V}\|\nearrow$
  . mouvement *retardé* (ou freiné) : $\vec{V}\cdot\vec{\Gamma} < 0$ $(\forall t)$ ou bien $\|\vec{V}\|\searrow$
  . mouvement *uniforme* : $\vec{V}\cdot\vec{\Gamma} = 0$ $(\forall t)$ ou aussi $\|\vec{V}\| = C^{te}$.
  . *mouvement uniformément accéléré* (resp. retardé) se définit comme accéléré + $\|\vec{\Gamma}\| = C^{te}$ (resp. retardé + $\|\vec{\Gamma}\| = C^{te}$).

  varié $\Leftrightarrow$ (accéléré ou retardé).
  uniformément varié $\Leftrightarrow$ uniformément accéléré ou uniformément retardé.

- *Mouvement circulaire uniforme* : voir schéma, M est en mouvement par rapport à $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ repéré par l'angle polaire $\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}} = \Theta$. On a : $\dot{\Theta} = \omega$, constante, appelée vitesse angulaire de M, et $\vec{V} = a\,\dot{\Theta}\,\vec{\tau}$, $\vec{\Gamma} = a\,\dot{\Theta}^2\,\vec{n}$ ont donc des normes constantes.



• *Mouvement à accélération centrale* : le mouvement (M/R) est à accélération centrale, lorsqu'il existe un point $A \in R$ (A fixe dans R) tel que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R) = \vec{0}\ (\forall t)$. A est le *centre* ou le *pôle* du mouvement.

On démontre alors : $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R) = \vec{C}$ vecteur constant dans R, et la trajectoire est plane (rectiligne si $\vec{C} = \vec{0}$).

• *Loi des aires par rapport à un point* A : le mouvement (M/R) vérifie la loi des aires par rapport à A, lorsqu'il existe un point $A \in R$ (fixe dans R) tel que : le mouvement se fait dans un *plan passant par* A et fixe dans R, et $\|\overrightarrow{AM}\|^2 \dot{\theta} = C$ (*constant*), θ étant un angle polaire de $\overrightarrow{AM}$ par rapport à un axe (fixe) du plan.

Dans certaines conditions, accélération centrale $\Leftrightarrow$ loi des aires, (par rapport au même point A).

4° - COMPOSITION DES MOUVEMENTS

COMMENTAIRE :

Le mouvement d'une mouche dans un train pose divers problèmes. Si le train est lui-même en mouvement par rapport au sol, on voit que les vitesses de la mouche par rapport au train ou par rapport au sol sont différentes ; à plus forte raison les accélérations.

On dit qu'il y a composition des mouvements (de la mouche et du train).

HYPOTHESES ET VOCABULAIRE :

On considère :

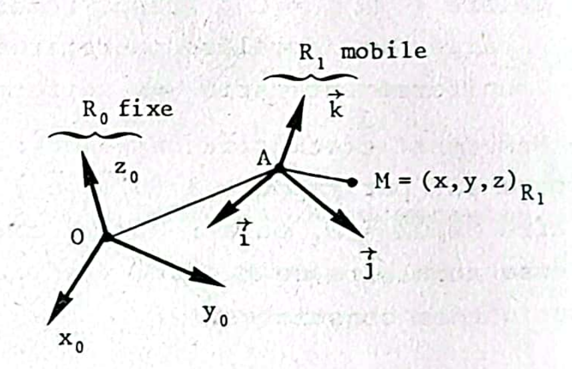
- un repère $R_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ appelé *repère absolu* (parfois repère fixe).
- un repère $R_1 = (A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, supposé mobile dans R_0 et appelé *repère relatif*.
- un point M en mouvement dans R_1, donc aussi (en général) en mouvement dans R_0.

On simplifie la compréhension en mettant des indices R_0 ou R_1 dans les dérivées de vecteurs, à la place des indices des bases de R_0 ou R_1.

On appelle *mouvement absolu de* M, le mouvement M/R_0 ; et *mouvement relatif* de M, le mouvement M/R_1.

BUT RECHERCHÉ :

Préciser les diverses vitesses et accélérations qui interviennent dans les mouvements M/R_0, M/R_1.



1. VITESSES

- $\vec{V}(M/R_0)$ notée aussi $\vec{V}_a(M)$: *vitesse absolue* de M.
- $\vec{V}(M/R_1)$ notée aussi $\vec{V}_r(M)$: *vitesse relative* de M.

On part de $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on arrive à :

$$\underbrace{\left(\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right)_{R_0}}_{} = \underbrace{\left(\frac{d\,\vec{OA}}{dt}\right)_{R_0} + x\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + y\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} + z\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0}}_{} + \underbrace{(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})}_{}$$

d'où $\vec{V}_a(M) \quad = \quad \vec{V}_e(M) \quad + \quad \vec{V}_r(M)$

avec, par définition : $\vec{V}_e(M)$ = *vitesse d'entraînement* de M

d'où la *formule des vitesses* : $\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r}$

CALCULS PRATIQUES :

- $\vec{V}_a(M) = \left(\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right)_{R_0}$ par les règles usuelles de dérivation relativement à R_0.
- $\vec{V}_r(M) \equiv \left(\frac{d\,\vec{AM}}{dt}\right)_{R_1}$ dérivations usuelles dans R_1.

Pour $\vec{V}_e(M)$, on peut écrire :

$$\underline{\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right)_{R_0,\ M\in R_1}} \qquad \text{ou} \qquad \vec{V}(M\in R_1/R_0),$$

car tout se passe comme si l'on dérivait dans R_0, mais sans dériver les coordonnées cartésiennes (x,y,z) de M dans R_1 ; donc, comme si M était fixe dans R_1.

REGLE :

Pour calculer $\vec{V}_e(M)$, on suppose que les coordonnées cartésiennes relatives, *et elles seules*, sont constantes. Ceci n'est qu'un artifice destiné à faciliter le calcul, rien d'autre.

2. ACCELERATIONS

- $\vec{\Gamma}(M/R_0)$, notée aussi $\vec{\Gamma}_a(M)$: *accélération absolue* de M.
- $\vec{\Gamma}(M/R_1)$, notée aussi $\vec{\Gamma}_r(M)$: *accélération relative* de M.
- $\vec{\Gamma}(M\in R_1/R_0)$, notée aussi $\vec{\Gamma}_e(M)$: *accélération d'entraînement* de M.

On part de la formule précédente de $\vec{V}_a(M)$, on dérive dans R_0, d'où :

$$\underbrace{\left(\frac{d\,\vec{V}_a(M)}{dt}\right)_{R_0}}_{\vec{\Gamma}_a(M)} = \overbrace{\left(\frac{d\,\vec{OA}}{dt^2}\right)_{R_0} + x\left(\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}\right)_{R_0} + y\left(\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}\right)_{R_0} + z\left(\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)_{R_0}}^{\vec{\Gamma}_e(M)}$$

$$+ \underbrace{2\left[\dot{x}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + \dot{y}\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} + \dot{z}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0}\right]}_{\vec{\Gamma}_c(M)} + \underbrace{(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})}_{\vec{\Gamma}_r(M)}$$

d'où la *formule des accélérations* : $\boxed{\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c + \vec{\Gamma}_r}$

avec par définition : $\vec{\Gamma}_c(M)$ = *accélération complémentaire* de M,

ou encore : accélération de *Coriolis* (de M).

CALCULS PRATIQUES :

. $\vec{\Gamma}_a(M) = \left(\frac{d\,\vec{V}_a(M)}{dt}\right)_{R_0}$ ou $\vec{\Gamma}(M/R_0)$, règles usuelles/R_0.

. $\vec{\Gamma}_r(M) = \left(\frac{d\,\vec{V}_r(M)}{dt}\right)_{R_1}$ ou $\vec{\Gamma}(M/R_1)$, règles usuelles/R_1.

• Pour $\vec{\Gamma}_e(M)$ ou $\vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0)$, on peut écrire :

$$\underline{\vec{\Gamma}_e(M) = \left(\frac{d\,\vec{V}_e(M)}{dt}\right)_{R_0, M \in R_1}}$$

car tout se passe comme dans la vitesse d'entraînement : M supposé lié à R_1.

Il est faux d'écrire seulement $\vec{\Gamma}_e(M) = \left(\frac{d\,\vec{V}_e(M)}{dt}\right)_{R_0}$ (<u>sans</u> $M \in R_1$)

• Pour $\vec{\Gamma}_c(M)$, on applique : $\underline{\vec{\Gamma}_c(M) = 2\left[\dot{x}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + \dot{y}\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} + \dot{z}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0}\right]}$

ou bien : $\underline{\vec{\Gamma}_c(M) = 2\left[\left(\frac{d\,\vec{V}_r(M)}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\Gamma}_r(M)\right]}$ (<u>sans lier</u> M à R_1)

ou bien : $\underline{\vec{\Gamma}_c(M) = 2\left[\left(\frac{d\,\vec{V}_e(M)}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\Gamma}_e(M)\right]}$ (<u>sans lier</u> M à R_1)

EXEMPLE PLAN :

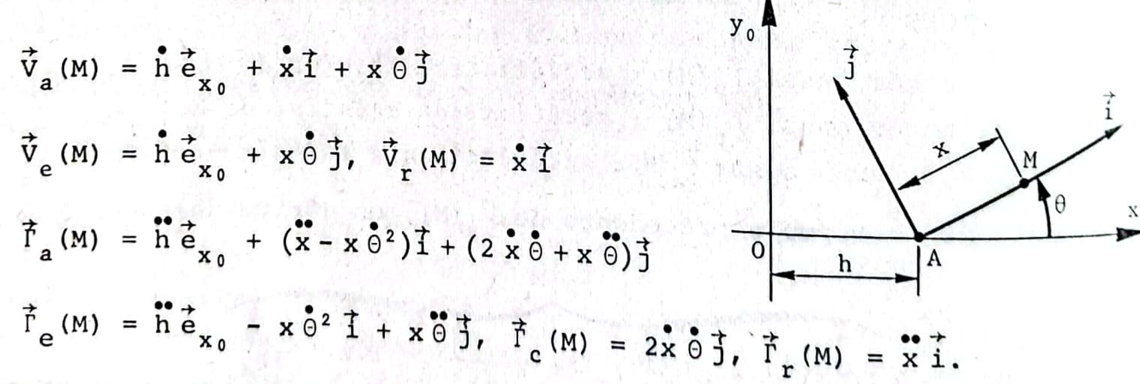
repère absolu $R_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$, repère relatif $R_1 = (A, \vec{i}, \vec{j})$,

avec : $\overrightarrow{OA} = h(t)\vec{e}_{x_0}$ (h fonction supposée donnée),

$\widehat{\vec{e}_{x_0}, \vec{i}} = \theta(t)$ (θ fonction supposée donnée),

$\overrightarrow{AM} = x(t)\vec{i}$ (x fonction supposée donnée).

On obtient, en suivant les rappels précédents :



$\vec{V}_a(M) = \dot{h}\,\vec{e}_{x_0} + \dot{x}\,\vec{i} + x\,\dot{\theta}\,\vec{j}$

$\vec{V}_e(M) = \dot{h}\,\vec{e}_{x_0} + x\,\dot{\theta}\,\vec{j}$, $\vec{V}_r(M) = \dot{x}\,\vec{i}$

$\vec{\Gamma}_a(M) = \ddot{h}\,\vec{e}_{x_0} + (\ddot{x} - x\,\dot{\theta}^2)\vec{i} + (2\,\dot{x}\,\dot{\theta} + x\,\ddot{\theta})\vec{j}$

$\vec{\Gamma}_e(M) = \ddot{h}\,\vec{e}_{x_0} - x\,\dot{\theta}^2\,\vec{i} + x\,\ddot{\theta}\,\vec{j}$, $\vec{\Gamma}_c(M) = 2\dot{x}\,\dot{\theta}\,\vec{j}$, $\vec{\Gamma}_r(M) = \ddot{x}\,\vec{i}$.

REMARQUES ET COMPLEMENTS :

. $\vec{V}_e$ et $\vec{\Gamma}_e$ du point M peuvent s'interpréter comme une vitesse absolue et une accélération absolue non pas du point M, mais d'un certain point lié à R_1, et sur lequel passerait le point M juste au moment où l'on calcule la dérivée.

. Un tel point est appelé *point coïncidant* (à l'instant t) avec M, et il est souvent noté M*, au lieu de $M \in R_1$; cela veut dire, dans chaque notation : M supposé lié à R_1, mais cette fixité dans R_1 n'est pas vraie, ce n'est qu'un artifice pour dériver convenablement lors du calcul de $\vec{V}_e$ et $\vec{\Gamma}_e$.

. Ainsi, supposons un cas où les coordonnées relatives de M dépendent d'une fonction $\theta(t)$, et aussi la base relative, par exemple $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \cos\theta\,\vec{i}$ avec $\widehat{\vec{e}_{x_0},\vec{i}} = \theta$ (donc $\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{j}$). Voir exemple précédent où $x = \cos\theta$.

. On aura : $\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{j}$

θ a été pris constant dans $\cos\theta$, car $\cos\theta$ = abscisse relative,
θ a été pris variable dans la dérivation de $\vec{i}$, cependant.

. Le lecteur débutant, pour ne pas être tenté de tout mélanger, pourra dans de tels cas exprimer $\overrightarrow{AM}$ sous la forme $\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$ *sans exprimer* α, β, γ, et donc sans avoir à les dériver, et en dérivant $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ comme il se doit.

CHAPITRE 6

CINETIQUE DU POINT

PRELIMINAIRES :

La *cinétique* est un ensemble de définitions pour passer de la cinématique (où les causes des mouvements ne sont pas envisagées) à la dynamique (où ces causes interviennent).

1° - POINT MATERIEL - MASSE

Un objet "assez petit" pour être représenté par un point, possède en réalité une *masse*. La notion de masse, assez difficile, se précise au Chapitre 7, d'après la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$.

• Dans ce livre, on se borne à préciser que la masse représente la quantité de matière de l'objet, d'où :

Masse : scalaire positif constant (indépendant de t) et indépendant de tout repère.

Point matériel (M,m) : point M (représentant un objet), et masse m de cet objet.

2° - LES 5 DEFINITIONS ASSOCIEES AU POINT MATERIEL (M,m)

HYPOTHESE :

Jusqu'à la fin de ce Chapitre 6, le point matériel M de masse m, est supposé en mouvement dans un repère R.

1. *Résultante cinétique* (appelée aussi "quantité de mouvement") :
   <u>vecteur $m\vec{V}(M/R)$</u> noté aussi $\vec{\mathcal{Q}}$ (M/R).
2. *Résultante dynamique* (appelée aussi "quantité d'accélération") :
   <u>vecteur $m\vec{\Gamma}(M/R)$</u> noté aussi $\vec{\mathcal{A}}$ (M/R).
3. *Energie cinétique* : scalaire noté T ou T(M/R), défini par :
   $$T(M/R) = \frac{1}{2} m \|\vec{V}(M/R)\|^2$$
4. *Moment cinétique* : application "point P ⟶ vecteur $\vec{\sigma}_P$", définie à partir de $m\vec{V}(M/R)$ par : $\vec{\sigma}_P(M/R) = \vec{PM} \wedge m\vec{V}(M/R)$.

   • On dit que dans le mouvement de (M,m) par rapport à R, le moment cinétique en P est le moment en P du vecteur $m\vec{V}(M/R)$ supposé d'origine M.
5. *Moment dynamique* : application "point P ⟶ vecteur $\vec{\delta}_P$", définie à partir de $m\vec{\Gamma}(M/R)$ par : $\vec{\delta}_P(M/R) = \vec{PM} \wedge m\vec{\Gamma}(M/R)$.

• On dit comme au 4, que le moment dynamique est le moment du vecteur $m\vec{\Gamma}(M/R)$ supposé d'origine M.

REMARQUE :

Pour un vecteur $\vec{u}$ dont le support passe par un point A, par définition le moment en P est $\overrightarrow{PA} \wedge \vec{u}$.

Donc dans le moment cinétique et le moment dynamique, les vecteurs $m\vec{V}(M/R)$ et $m\vec{\Gamma}(M/R)$ sont utilisés comme si leur support passait par M.

3° - RELATIONS IMPORTANTES

Outre les relations évidentes, telles que $\frac{d}{dt}(m\vec{V}(M/R))_R = m\vec{\Gamma}(M/R)$ ou $\frac{dT(M/R)}{dt} = m\vec{V}(M/R)\cdot\vec{\Gamma}(M/R)$, on retiendra :

$$\boxed{\vec{\delta}_P(M/R) = \left(\frac{d\,\vec{\sigma}_P(M/R)}{dt}\right)_R + m\vec{V}(P/R) \wedge \vec{V}(M/R)}$$

Preuve succincte : en abrégeant les notations, on écrit : $\vec{\sigma}_P(M) = \overrightarrow{PM} \wedge m\vec{V}(M)$ on dérive (par rapport à t) dans R, d'où :

$$\left(\frac{d\,\vec{\sigma}_P(M)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\,\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_R \wedge m\vec{V}(M) + \overrightarrow{PM} \wedge m\vec{\Gamma}(M)$$

on introduit un point $A \in R$ (A fixe dans R), $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}$, d'où :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_R = \vec{V}(M) - \vec{V}(P)$$

et la formule précédente devient :

$$\left(\frac{d\,\vec{\sigma}_P(M)}{dt}\right)_R = -m\vec{V}(P) \wedge \vec{V}(M) + \vec{\delta}_P(M) \quad (\text{car } m\vec{V}(M) \wedge \vec{V}(M) = \vec{0}),$$

c'est la formule cherchée, en transposant.

CHAPITRE 7

DYNAMIQUE DU POINT

Forces - Puissance - Travail - Théorèmes généraux - Equilibres

1° - FORCES

Toutes les *causes d'un mouvement*, bien qu'elles soient apparemment très diverses, sont appelées *forces*.

DEFINITIONS :

Point gêné : point dont la trajectoire est soumise à des conditions de type géométrique.

Exemple : une bille dans un bol donne l'idée d'un point gêné, tant qu'elle ne cesse pas de toucher le bol.

Point libre : point se trouvant dans tout autre cas que gêné.

Exemple : la bille de l'exemple précédent donne l'idée d'un point libre, lorsqu'elle est hors du bol et "en l'air".

Forces : influences de toutes sortes, agissant sur le point.

NOTATIONS :

Une force est représentée par un *vecteur*, dont le support passe par le point sur lequel elle agit. En général on utilise $\vec{F}$, $\vec{P}$, ou $\vec{R}$, etc...

RESULTANTE :

Lorsqu'un point est soumis à plusieurs forces $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ alors il est soumis à l'unique force, appelée résultante, définie par :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{(somme vectorielle)}.$$

CLASSIFICATION DES FORCES : en 2 grands groupes

1. *Forces connues ou données*, telles que :
   - Forces "à distance" : poids, attraction du soleil, etc...
   - Forces de résistance qui ne font pas du point un point gêné : résistance de l'air, rebondissement sur un obstacle, ...
   - Forces données par une fonction connue de t, M ou $\vec{V}$.
2. *Forces inconnues, ou liaisons*, telles que :
   - Forces inconnues apparaissant pour un point gêné : réaction de la trajectoire imposée, ...
   - Forces inconnues, pouvant éventuellement exister pour d'autres raisons que "gêné".

2° - PUISSANCE - TRAVAIL - FONCTION DE FORCE

• *Puissance de $\vec{F}$ dans le mouvement* M/R : quantité scalaire, notée $\mathcal{P}_R$ ou $\mathcal{P}_R(\vec{F},M)$, définie par :

$$\boxed{\mathcal{P}_R = \vec{F}\cdot\vec{V}(M/R)}$$

• *Travail* de $\vec{F}$ dans le laps de temps $[t_1,t_2]$: quantité scalaire, notée $\mathcal{T}_R(t_1,t_2)$ par exemple, défini par l'intégrale suivante :

$$\boxed{\mathcal{T}_R(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_R\, dt}$$

Remarques : $\mathcal{T}_R$ dépend évidemment (en général) de la trajectoire de M dans R. En pratique, $\mathcal{P}_R$ s'exprime en fonction des divers paramètres du problème. Il convient donc de se rappeler que ces paramètres sont fonctions de t, lors du calcul intégral.

Travail élémentaire (à l'instant t) : expression notée $\Delta\mathcal{T}_R$ définie par $\Delta\mathcal{T}_R = \mathcal{P}_R\,dt$, ou encore $\vec{F}\cdot\vec{V}(M/R)dt$, ou $\vec{F}\cdot\overrightarrow{dM}$.
En général, il n'y a aucune raison pour que le travail élémentaire soit de type dW (différentielle d'une fonction), d'où la notation $\Delta\mathcal{T}_R$.

• *Fonction de force*

Définition : la force $\vec{F}$ *dérive* d'une fonction de force U (fonction scalaire) lorsqu'on peut écrire $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,U$.

Existence : $\vec{F}$ étant donnée, il existe U telle que $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \vec{F}$, lorsque $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} \equiv \vec{0}$

Calcul : ayant vérifié que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} \equiv \vec{0}$, il suffit alors de résoudre :

en cartésienne : $\frac{\partial U}{\partial x} = \vec{F}\cdot\vec{e}_x$ et $\frac{\partial U}{\partial y} = \vec{F}\cdot\vec{e}_y$ et $\frac{\partial U}{\partial z} = \vec{F}\cdot\vec{e}_z$

en cylindrique : $\frac{\partial U}{\partial \rho} = \vec{F}\cdot\vec{e}_\rho$ et $\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \vec{F}\cdot\vec{e}_\theta$ et $\frac{\partial U}{\partial z} = \vec{F}\cdot\vec{e}_z$

en sphérique : $\frac{\partial U}{\partial r} = \vec{F}\cdot\vec{e}_r$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} = \vec{F}\cdot\vec{e}_\phi$ et $\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \vec{F}\cdot\vec{e}_\theta$

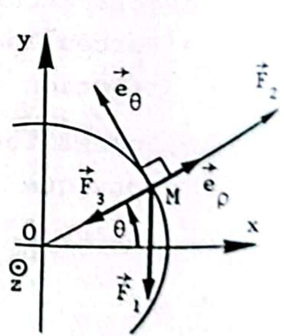
(le même Θ qu'en cylindrique)

Exemples simples : dans $R = (O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, un point matériel (M,m) se déplace sur le cercle défini par $x^2 + y^2 = a^2$ et $z = 0$.

Il est soumis aux forces données $\vec{F}_1 = -mg\,\vec{e}_y$ $\vec{F}_2 = k^2\,\overrightarrow{OM}$ (g, k constantes) et à la force inconnue (due au cercle) :

$$\vec{F}_3 = -N\frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||} \text{ (N fonction inconnue).}$$

On étudie les fonctions de forces, en cartésienne ou en cylindrique suivant le cas.



1. $\vec{F}_1$ *dérive de* $U_1 = -mg\,y + C_1$ (C_1 constante)

Car
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{0},$$

puis $\frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow U_1$ fonction de y et z seuls, $\frac{\partial U_1}{\partial y} = -mg \Rightarrow U_1 = -mg\,y$ augmenté d'une "constante", qui est en fait une fonction de z, mais $\frac{\partial U_1}{\partial z} = 0$ montre que U_1 ne dépend pas de z, d'où réponse.

2. $\vec{F}_2$ *dérive de* $U_2 = \frac{k^2\rho^2}{2} + C_2$ (C_2 constante)
Car visiblement, $\overrightarrow{\text{grad}}\,U_2 = k^2\rho\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\times 0\vec{e}_\theta + 0\vec{e}_z$, et comme $\rho\vec{e}_\rho \equiv x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ on a bien $\overrightarrow{\text{grad}}\,U_2 = k^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \equiv k^2\,\overrightarrow{OM}$.
On aurait pu passer par la résolution des équations prévues.

3. $\vec{F}_3$ *ne peut pas dériver de* U_3, car $\vec{F}_3$ est inconnue. Il en est de même pour toute force de réaction, même si, lors de l'étude du mouvement, on peut la déterminer effectivement.

3° - REPERES GALILEENS ET LOI FONDAMENTALE

ENONCE COMMUN :

L'expérience a conduit à poser l'axiome, ou principe, ou *loi fondamentale*, de la dynamique (du point) :

> Il existe un repère R_0 et un écoulement du temps t, pour lesquels tout point matériel (M,m) soumis à la force totale $\vec{F}$, vérifie :
> $$m\vec{\Gamma}\,(M/R_0) = \vec{F} \quad \text{à tout instant } t$$

De plus, on admet qu'il existe une classe de repères, {R}, tels que la loi fondamentale garde la forme précédente,
$$m\vec{\Gamma}\,(M/R) = \vec{F}, \quad \text{à tout instant } t$$

Cette classe est celle des *repères galiléens*.

PROPRIETE :

Si R est un repère galiléen, tout autre repère galiléen R' est défini par

R' est en translation rectiligne uniforme dans R

ce qui signifie : chacun des points liés à R' a la même vitesse par rapport à R que tous les autres, indépendante de t et constante dans R.

REPERES USUELS :

En pratique, au niveau de ce livre, on considère comme de très bonnes approximations de repères galiléens, suivant les phénomènes étudiés, les suivants :

• Repère de *Képler* : origine au centre du soleil, 3 axes passant par des étoiles convenablement choisies (pour les planètes, les fusées interplanétaires, etc..., et en général tout mouvement dans le système solaire).

• Repère dont l'origine est au centre de la terre, 3 axes passant par des étoiles convenables (pour les satellites artificiels, ou tous objets restant dans une boule concentrique à la terre, au rayon de l'ordre de 5 à 10 rayons terrestres).

IMPORTANT :

Des axes liés à la terre (en particulier s'il y a un axe vertical), ne constituent pas un repère galiléen (contrairement à une idée assez répandue) ni même une bonne approximation.

A ce sujet, voir Chapitre 8 le cas très particulier de la mécanique dite "terrestre".

LOI FONDAMENTALE EN REPERE QUELCONQUE R_1 :

Soit R_0 galiléen, et R_1 quelconque. On sait : $\vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_1) + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c$ ou $\vec{\Gamma}_e$ est $\vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0)$, et $\vec{\Gamma}_c$ l'accélération de Coriolis de M.

Soit $\vec{F}$ la force totale agissant sur M, on écrit évidemment

la loi fondamentale dans R_1 : $\underline{m\vec{\Gamma}(M/R_1) = \vec{F} - m\vec{\Gamma}_e - m\vec{\Gamma}_c}$

• $-m\vec{\Gamma}_e$ et $-m\vec{\Gamma}_c$ sont des *forces fictives d'inertie*, dites d'entraînement et complémentaire (ou de Coriolis), connues à partir du mouvement R_1/R_0, ou données en pratique dans les problèmes.

4° - THEOREMES GENERAUX (DE LA DYNAMIQUE DU POINT)

PRELIMINAIRES :

Vecteur lié : vecteur dont le support passe par un point connu.

Exemples : • Une force agissant sur un point M est considérée comme un vecteur lié, dont le support passe par M.

• La résultante cinétique $m\vec{V}(M/R)$, la dynamique $m\vec{\Gamma}(M/R)$ sont considérées comme des vecteurs liés de support passant par M, dans $\vec{\sigma}_p$ et $\vec{\delta}_p$.

Moment d'un vecteur lié : soit le vecteur $\vec{u}$, lié à M ; son moment est l'application "point ⟶ vecteur", notée par exemple $\vec{\mathcal{M}}(\vec{u},M)$, définie par :

$$P \longrightarrow \underline{\vec{\mathcal{M}}_p(\vec{u},M) = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{u}}$$

Exemples : Pour la résultante cinétique $m\vec{V}(M/R)$, on a vu le moment cinétique (en P) : $\vec{\sigma}_p(M/R) = \overrightarrow{PM} \wedge m\vec{V}(M/R)$

• De même, le moment dynamique : $\vec{\delta}_p = \overrightarrow{PM} \wedge m\vec{\Gamma}$, en abrégé.

• Pour une force $\vec{F}$ appliquée à M : $\vec{\mathcal{M}}_p(\vec{F},M) = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{F}$.

THEOREMES GENERAUX : valables à tout instant t

Les 3 théorèmes (ou 5) énoncés, sont valables en repère galiléen R.

Pour les appliquer en repère quelconque, il suffit d'y remplacer la *force totale* $\vec{F}$ par $\vec{F} - m\vec{\Gamma}_e - m\vec{\Gamma}_c$ partout où elle intervient.

• <u>Théorème 1, ou théorème de la résultante cinétique</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{V}(M/R))_R = \vec{F}}$$

Preuve : puisque m est constante, ce n'est autre que $m\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F}$.

• <u>Théorème 2, ou théorème du moment dynamique</u>

$$\boxed{\vec{\delta}_P(M/R) = \vec{\mathcal{M}}_P(\vec{F},M) \quad \text{en tout point } P}$$

Rappel : $\vec{\delta}_P(M/R)$ s'exprime par $\left(\frac{d\vec{\sigma}_P(M/R)}{dt}\right)_R + m\vec{V}(P/R) \wedge \vec{V}(M/R)$.

• *Corollaire* : si P est fixe dans R, $\vec{V}(P/R) = \vec{0}$, et il reste le

Théorème du moment cinétique : $\underline{\left(\frac{d\vec{\sigma}_P(M/R)}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_P(\vec{F},M),\ \forall P \in R}$

• <u>Théorème 3, ou théorème de l'énergie</u>

Si T(M/R) désigne l'énergie cinétique (calculée par $T = \frac{1}{2}m\,\|\vec{V}(M/R)\|^2$) et si $\mathcal{P}_R$ désigne la puissance de *toutes* les forces (calculée par $\mathcal{P}_R = \vec{F}\cdot\vec{V}_R$)

alors : $\boxed{\frac{dT(M/R)}{dt} = \mathcal{P}_R}$

• *Corollaire* : s'il existe une fonction (scalaire) W telle que $\mathcal{P}_R = \frac{dW}{dt}$ alors le théorème précédent "s'intègre", et donne le théorème appelé

Intégrale première de l'énergie : <u>T = W + C</u> (*C constante*)

5° - NOTIONS COMPLEMENTAIRES - EQUILIBRES

DEFINITION :

On appelle *intégrale première* d'un mouvement, toute expression contenant un ou plusieurs *paramètres* du mouvement, une ou plusieurs de leurs *dérivées* 1ères, et qui reste *constante* durant le mouvement :

Exemples : lorsqu'elle existe, l'intégrale 1ère de l'énergie ;
lorsqu'elle a lieu, la loi des aires (Chapitre 5, 3°).

TRAVAIL D'UN GRADIENT :

Lorsque $\vec{F}$ dérive de U, on dit que $\vec{F}$ est un gradient (ou un champ de gradients), car $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,U$.

Dans ce cas, la puissance $\mathcal{P}_R$ (de $\vec{F}$ dans le mouvement (M/R)) s'écrit :
$\mathcal{P}_R = \overrightarrow{grad}\,U\cdot\vec{V}(M/R)$, soit, en cartésiennes : $\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}$, en posant $M = (x,y,z)_R$

<u>1er cas</u> : si U dépend, outre de x, y, z, explicitement de t, c'est-à-dire pour U(x,y,z,t), on sait : $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}$ donc $\mathcal{P}_R \neq \frac{dU}{dt}$:on ne peut rien dire.

2ème cas : si U dépend que de x, y, z, et pas explicitement de t, alors on sait $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}$, donc $\mathcal{P}_R = \frac{dU}{dt}$

Dans ce cas, le travail pendant $[t_1, t_2]$ s'écrit :

$$\mathcal{T}_R(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_R\, dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} dU = U(t_2) - U(t_1)$$

où il faut bien comprendre ce qui suit : $U(t_2)$ signifie $U(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$, $U(t_1)$ analogue.

• On dit que le travail d'un gradient pendant $[t_1, t_2]$ ne dépend pas du chemin suivi par M, mais ne dépend que de la position de M à l'instant t_2, soit $(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$, et de même de sa position à l'instant t_1.

EQUILIBRES :

Définition : M est en équilibre dans R, lorsque ses coordonnées dans R restent constantes au cours du temps.

Règle pratique : pour trouver les positions d'équilibre possibles d'un point M soumis à la force totale $\vec{F}$, il suffit de résoudre : $\vec{F}(\text{totale}) = \vec{0}$ et de garder seulement les solutions telles que M ait des coordonnées (dans R) constantes.

Preuve succincte : d'après la loi fondamentale, $\vec{F} = \vec{0}$ revient à $\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{0}$, donc $\vec{V}(M/R)$ constant dans R. En ne gardant que les solutions à coordonnées constantes, on garde en fait $\vec{V}(M/R) = \vec{0}$, donc M fixe dans R, cqfd.

CHAPITRE 8

MECANIQUE TERRESTRE, POINT MATERIEL PESANT FROTTEMENTS, LIAISONS PARFAITES

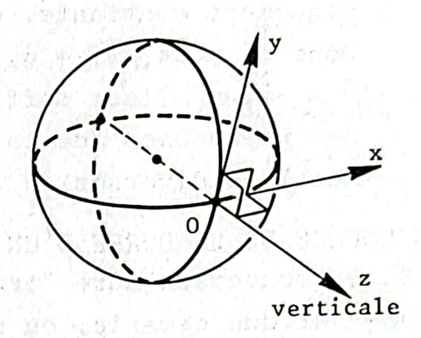
1° - REPERES TERRESTRES - MECANIQUE TERRESTRE

REPERE TERRESTRE :

Origine O fixée à la terre, en général au sol (bornes géodésiques , etc...).

Axe Oz *vertical*, c'est-à-dire passant par le centre de la terre.

2 autres axes *horizontaux*, c'est-à-dire tangents en O à la terre, et *liés à la terre.*



UN REPERE TERRESTRE N'EST PAS GALILEEN

Preuve : Soit R_0 galiléen, soit R terrestre. La loi fondamentale s'écrit :

$$m\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F} - m\vec{\Gamma}_e - m\vec{\Gamma}_c$$

où $\vec{F}$ est la force totale s'exerçant sur le point M. Dans $\vec{F}$, séparons 2 catégories : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, telles que :

$\vec{F}_1$ = résultante des forces données et des forces de liaison s'il y a lieu,

$\vec{F}_2$ = résultante des forces dues aux astres (terre, soleil, lune, etc...).

On peut écrire, (R repère terrestre) : $m\,\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 - m\vec{\Gamma}_e) - m\,\vec{\Gamma}_c$.

$$\underline{\text{On pose : } \vec{F}_2 - m\vec{\Gamma}_e = \vec{P}, \text{ poids,}}$$

on obtient la *loi fondamentale en repère terrestre* R :

$$\underline{m\,\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F}_1 + \vec{P} - m\vec{\Gamma}_c}$$

avec
- $\vec{F}_1$: forces données et de liaison.
- $\vec{P}$: poids
- $-m\,\vec{\Gamma}_c$: force (fictive d'inertie) de Coriolis.

Ce n'est pas une expression de loi fondamentale "en galiléen", cqfd.

CAS USUEL :

Si $m\,\vec{\Gamma}_c$ est négligeable devant les autres termes, alors on a :

$$m\,\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F}_1 + \vec{P},$$

et on pourrait croire que c'est une loi "en galiléen", puisque le poids peut être considéré comme une force donnée (ou plutôt connue) ; chacun sait qu'il est de type $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$ (dans R précédemment défini) et que g est une quantité positive pratiquement constante (on précise cela dans quelques lignes).

- Même ainsi, on est en "mécanique terrestre" simplifiée, mais le repère terrestre n'est pas galiléen.

• Pour fixer les idées, si $\|\vec{V}(M/R)\| < 1000$ km/h ou 300 m/s, (environ la vitesse du son, MACH 1), alors $m\|\vec{\Gamma}_c(M)\| < \frac{1}{200}\|\vec{P}\|$, et par suite on peut négliger la force de Coriolis, en général.

PRECISIONS SUR LE POIDS :

1. *Accélération de la pesanteur* : accélération $\vec{g}$ que prend (M,m) lorsqu'il est soumis à son seul poids $\vec{P} = \vec{F}_2 - m\vec{\Gamma}_e(M)$.
2. *L'expérience prouve* que, dans de "petites" zones terrestres, $\vec{g}$ est pratiquement constante, et dirigée vers le centre de la terre.
   Donc on pose $\|\vec{g}\| = g$, constante positive, de l'ordre de 9,8 m/s/s, et $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$. C'est suffisant en première approximation, pour la plupart des phénomènes "de la vie courante" (autos, trains, avions subsoniques, machines diverses).

INFLUENCE DE LA DUREE D'UN MOUVEMENT :

Si un mouvement dure "trop", il est possible que le chemin parcouru soit "long" et que g varie, ou encore que $-\vec{\Gamma}_c$ change de direction et intervienne "un peu", etc..., voir fin du 2° de ce chapitre.

CONCLUSION :

Si les vitesses par rapport au repère terrestre R ne sont pas trop grandes, et si la durée des phénomènes n'est pas trop longue, alors :
la *loi fondamentale en repère terrestre* R s'écrit *approximativement* :

$$m\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F} + \vec{P}$$

$\vec{F}$: forces données, liaisons
$\vec{P}$: poids

COMMENTAIRE :

Ce long paragraphe pourrait sembler inutile ou prolixe. Mais nous sommes des terriens, et il a semblé important de préciser (un peu) les conditions auxquelles nous sommes soumis.

2° - EXEMPLES CLASSIQUES DE MOUVEMENTS DE POINT PESANT

Dans les 2 exemples suivants, $R = (O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ est un repère terrestre et on néglige $\vec{\Gamma}_c$; $\vec{e}_z$ est vertical "vers le haut".

EXEMPLE 1 : (M,m) est soumis à son poids seul (mouvement de chute libre).

• On suppose qu'à l'instant initial (t=0), M est à l'origine O, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0 = \dot{x}_0\,\vec{e}_x + \dot{z}_0\,\vec{e}_z$ (donnée) ; on a : $\vec{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ d'où immédiatement $\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$, $\vec{\Gamma}(M/R) = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

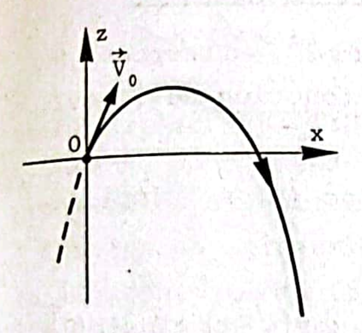
• *Mouvement* : la loi fondamentale s'écrit ici : $m\vec{\Gamma}(M/R) = -mg\,\vec{e}_z$
d'où les 3 équations scalaires : $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = -g$.
d'où $\dot{x} = Cte$, valant $\dot{x}_0$ en $t = 0$; d'où $x = \dot{x}_0 t + Cte$, et en $t = 0$ on voit que $0 = Cte$, donc finalement : $x = \dot{x}_0 t$. De même, $y = 0\ (\forall t)$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t$.

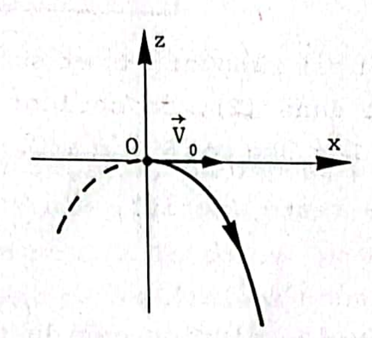
• Quelques conséquences :

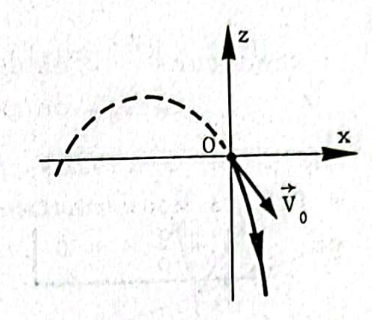
. $y = 0 (\forall t)$ donc mouvement dans le plan (xOz).

. en éliminant t entre x et z, on a : $z = -\frac{g}{2\dot{x}_0^2}x^2 + \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}x$, donc parabole à concavité vers $z < 0$.

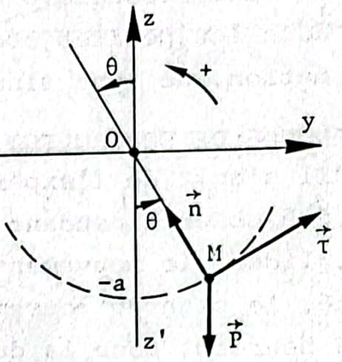
. suivant les valeurs de $\dot{x}_0$ et $\dot{z}_0$ (ou de $\vec{V}_0$), on a les allures de trajectoires indiquées ci-après, sur lesquelles le mouvement est uniformément varié car $\|\vec{\Gamma}\| = g$, constante.







EXEMPLE 2 : Pendule plan, simple, pesant



La masse ponctuelle m étant concentrée à l'extrémité M d'une tige OM, rigide et "négligeable", dont l'extrémité O est fixe, on voit que M est gêné, puisque sa trajectoire est nécessairement tracée sur la sphère de centre O, de rayon OM = a (donné).

On suppose qu'à l'instant initial (t=0) la vitesse (non nulle) coupe Oz, M étant ou non sur Oz ; on dit qu'on a un *pendule simple plan* ; (si la vitesse initiale n'est pas dans un plan passant par Oz, le pendule est sphérique). On peut aussi obtenir le pendule simple plan, en supposant M(t=0) non sur Oz et $\vec{V}(t=0) = \vec{0}$. Le fait que le mouvement est plan (dans un plan contenant Oz) est intuitif, mais facilement démontrable, dans les 2 cas indiqués. On peut toujours supposer que le plan est (yOz).

• Un seul paramètre suffit, on prend $\widehat{-\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}} = \theta \equiv \widehat{\vec{e}_z, \vec{n}}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la trajectoire (celle-ci est évidemment un cercle) ; on considère aussi le vecteur tangent $\vec{\tau}$, (voir base intrinsèque ou de Frenet).

• On a $\overrightarrow{OM} = -a\,\vec{n}$, d'où $\vec{V}(M/R) = a\,\dot{\theta}\vec{\tau}$ car $\left(\frac{d\vec{n}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{n}}{d\theta}\right)_R \times \dot{\theta} = -\vec{\tau}\cdot\dot{\theta}$ et de même $\vec{\Gamma}(M/R) = a\,\ddot{\theta}\,\vec{\tau} + a\,\dot{\theta}^2\,\vec{n}$.

• De plus, $\vec{e}_z \cdot \vec{n} = \cos\theta$ visiblement, et $\vec{e}_z \cdot \vec{\tau} = \sin\theta$.

• *Mouvement* : la loi fondamentale, projetée sur $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$, donne :
$m\,a\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ et $m\,a\,\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + L$, car il est clair que M est gêné, donc que la tige OM introduit la force de liaison inconnue $L\vec{n}$ (L fonction scalaire inconnue) ; d'où en particulier, l'*équation exacte* du pendule simple plan :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0} \qquad (1)$$

Ensuite, si on sait en tirer $\Theta(t)$, on a L déterminé par l'autre équation :

$$\underline{L = m a \dot\Theta^2 + mg \cos\Theta} \qquad (2)$$

• *Intégrale première de l'énergie* : $\mathcal{P}_R = (\vec{P} + \vec{L})\cdot\vec{V}(M/R)$ donne l'unique terme $\mathcal{P}_R = -mg\, a \sin\Theta\,\dot\Theta$, d'où la primitive (par rapport à t) évidente $W = mg\, a\cos\Theta + K$ (K constante) ; or, $T_R = \frac{1}{2} m a^2 \dot\Theta^2$, donc on a : $\frac{1}{2} m a^2 \dot\Theta^2 = mg\, a\cos\Theta + K$, qu'on écrit : $\boxed{\dot\Theta^2 = \frac{2g}{a}\cos\Theta + C \text{ (C constante)}}$

Remarques - en dérivant par rapport à t, et supprimant $2\dot\Theta$, on retrouve (1).
- en portant dans (2), on obtient L en fonction de Θ seul,

$$L = 3mg\cos\Theta + m\,a\,C.$$

• *Petits mouvements* : si Θ reste "petit", $\sin\Theta \simeq \Theta$, donc (1) se simplifie en : $\boxed{\ddot\Theta + \frac{g}{a}\Theta \simeq 0}$.

On sait résoudre $\ddot\Theta + \frac{g}{a}\Theta = 0$, la solution est de type $A\cos(\sqrt{\frac{g}{a}}t) + B\sin(\sqrt{\frac{g}{a}}t)$ donc les petites oscillations du pendule simple sont, en première approximation, de type sinusoïdal.

PENDULE DE FOUCAULT :

Il s'agit de l'expérience célèbre due à Foucault, ou un "immense"pendule a été observé pendant plusieurs heures, et où l'on a constaté que, $\vec{\Gamma}_c$ étant négligée, le mouvement aurait dû être rigoureusement plan : il ne l'a pas été, le plan du mouvement a tourné peu à peu autour de la verticale, (2π en 24 heures). Donc la durée du mouvement a été trop longue pour qu'on puisse se contenter de la loi fondamentale approximative en repère terrestre R : $m\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{F} + \vec{P}$, comme on le fait cependant presque toujours pour "dégrossir" un problème. Cette expérience met donc en évidence $\vec{\Gamma}_c$.

3° - FROTTEMENTS, LIAISONS PARFAITES

Lorsqu'un point est gêné (trajectoire soumise à des conditions géométriques), il apparaît une force de liaison, appelée aussi réaction.

LIAISON PARFAITE :

Par définition, liaison dont *la puissance est nulle* dans tout *mouvement arbitraire respectant les conditions* géométriques de la liaison.

Exemple : pour le pendule précédent, la liaison était traduite (intuitivement) par $L\vec{n}$; un mouvement arbitraire qui respecte le fait que la trajectoire est sur la sphère, a une vitesse $\vec{V}$ tangente à la sphère, donc orthogonale à $L\vec{n}$, donc $L\vec{n}\cdot\vec{V} = 0$. Ainsi, on a implicitement supposé cette liaison parfaite.

FROTTEMENTS :

En pratique, une liaison parfaite est irréalisable, (le pendule, même dans le vide, finit par s'arrêter, par exemple), et on constate qu'il se perd de

l'énergie (autrement dit : la puissance de la force de liaison est négative).

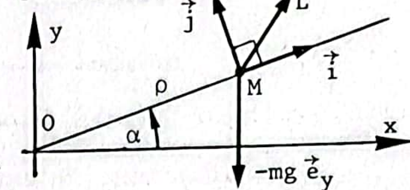
Pour tenir compte de cela, on introduit la notion de frottement, en énonçant : M est soumis à la *liaison* $\vec{L}$ *avec frottement* ; le *coefficient de frottement* f est une constante positive.

LOIS DU FROTTEMENT (LOIS DE COULOMB) :

1. $\vec{L} = \vec{T} + \vec{N}$, où $\vec{T}$ est tangente à la trajectoire et $\vec{N}$ normale.
2. $\vec{T}$ est de sens opposé à $\vec{V}$.
3. Si $\vec{V} \neq \vec{0}$ (M en mouvement), alors $\vec{T} = -f\|\vec{N}\| \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$, sinon $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$.

EXEMPLE, AVEC FROTTEMENT

Dans un plan repéré par $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$, on impose au point matériel (M,m) la trajectoire d'équation $y = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot x \; (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ où α est constant.



Les forces agissant sur M sont : le poids $-mg\,\vec{e}_y$ la liaison $\vec{L}$, avec frottement de coefficient f donné.

On introduit $\vec{i}$, unitaire de $\overrightarrow{OM}$, d'où $\vec{j}$ orthogonal dans le sens direct, on pose $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{i}$, et évidemment $\vec{L} = T\vec{i} + N\vec{j}$ pour pouvoir appliquer les lois de Coulomb.

• On a : $\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{i}$, $\vec{\Gamma} = \ddot{\rho}\,\vec{i}$, et $-mg\,\vec{e}_y \equiv -mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$, d'où la

loi fondamentale, exprimée sur $(\vec{i},\vec{j})$: $\begin{cases} m\ddot{\rho} = -mg\sin\alpha + T & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N & (2) \end{cases}$

• A cause des frottements, il y a 3 inconnues, ρ, T et N, mais on a une 3ème équation par les lois de Coulomb, en supposant qu'il y a mouvement, d'où : $\underline{|T| = f|N|}$ (3), et la relation $\underline{\dot{\rho}\,T < 0}$ de surcroît.

• *Résolution* : (2) donne $N = mg\cos\alpha$, d'où $T = \varepsilon f\,mg\cos\alpha$ par (3), avec (d'après $\dot{\rho}\,T < 0$) : $\varepsilon = -1$ si $\dot{\rho} > 0$ et $\varepsilon = +1$ si $\dot{\rho} < 0$.

Alors, (1) devient : $\ddot{\rho} = -g(\sin\alpha - \varepsilon f\cos\alpha)$, donc le mouvement est en général uniformément varié, sur la droite imposée.

• Quelques cas :
  . Si $\mathrm{tg}\,\alpha > f$, et si au départ $\varepsilon = +1$, M "descend".

  . Si $\mathrm{tg}\,\alpha > f$, et si au départ $\varepsilon = -1$, M "monte", mais $\ddot{\rho} < 0$ montre qu'il s'arrête au bout d'un certain temps. Alors il redescend, car $\varepsilon = +1$ (la vitesse change de sens).

  . Si $\mathrm{tg}\,\alpha < f$, soit en montant, soit en descendant, M finit par s'arrêter (si sa vitesse initiale $\dot{\rho}_0$ n'est pas nulle), ou bien il reste immobile (si $\dot{\rho}_0 = 0$).

  . Si $\mathrm{tg}\,\alpha = f$, et si M est initialement à l'arrêt, on voit que lorsqu'on passe à $\mathrm{tg}\,\alpha > f$ (en "inclinant" la droite $y = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot x$) il se met en mouvement. Ceci peut servir à estimer la valeur de f par des expériences.

CHAPITRE 9

TORSEURS

COMMENTAIRE :

Les torseurs sont préliminaires à la mécanique du solide, dans laquelle ils joueront un rôle analogue à celui des vecteurs en mécanique du point.

1° - RAPPELS

Les notions mathématiques suivantes sont adaptées à la Mécanique, donc en dimension 3.

• *Champ* : application, de type $\vec{H}$: | point, t ⟶ vecteur ; M(x,y,z),t ⟶ $\vec{H}(M,t)$ ou $\vec{H}(x,y,z,t)$

. Un champ (en Mécanique) applique $\mathbb{R}^3$ affine dans $\mathbb{R}^3$ vectoriel.

. Champ *fixe* : ne dépendant que de M, et non explicitement de t.

. Champ *variable* : dépendant de M et d'autres paramètres (en général du temps t comme dans la définition générale).

. Champ *uniforme* : indépendant de M, mais non nécessairement de t.

. Champ *central*, de centre A : champ tel qu'il existe *un* point A vérifiant :

$$\vec{H}(M) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0},\ \forall M$$

• *Champ affine et application linéaire associée* : $\vec{H}$ est affine, et $\mathcal{L}$ est l'application linéaire associée, lorsque :

$$\forall P,\ \forall Q \quad \vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$$

où $\mathcal{L}$ agit de $\mathbb{R}^3$ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ vectoriel, et où $\mathcal{L}$ est linéaire :

$$(\mathcal{L}(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \mathcal{L}(\vec{u}) + \lambda\,\mathcal{L}(\vec{v}),\ \forall\lambda \in \mathbb{R})$$

• *Application (linéaire) symétrique, antisymétrique* : l'application $\mathcal{L}$ (de $\mathbb{R}^3$ vectoriel dans lui-même, $\vec{u} \longrightarrow \mathcal{L}(\vec{u})$) est :

symétrique, lorsque $\vec{u}\cdot\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v}\cdot\mathcal{L}(\vec{u})$
antisymétrique, lorsque $\vec{u}\cdot\mathcal{L}(v) = -\vec{v}\cdot\mathcal{L}(\vec{u})$
$\forall\vec{u},\ \forall\vec{v}$

De telles applications sont *nécessairement linéaires*. Par exemple, pour l'antisymétrie, si $\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}$ sont des vecteurs et λ un scalaire (tous quelconques) on a les 3 hypothèses :

$$(1) \quad (\vec{u} + \lambda\vec{u}')\cdot\mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\mathcal{L}(\vec{u} + \lambda\vec{u}') \quad \text{et} \quad \begin{cases} (2) & \vec{u}\cdot\mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\mathcal{L}(\vec{u}) \\ (3) & u'\cdot\mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\mathcal{L}(\vec{u}') \end{cases}$$

on développe $(\vec{u} + \lambda\vec{u}')\cdot\mathcal{L}(\vec{v})$, et par (1), on a :

$$\vec{u}\cdot\mathscr{L}(\vec{v}) + \lambda\vec{u}'\cdot\mathscr{L}(\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\mathscr{L}(\vec{u}+\lambda\vec{u}')$$

Par (2) et (3) on a : $-\vec{v}\cdot\mathscr{L}(\vec{u}) - \lambda\vec{v}\cdot\mathscr{L}(\vec{u}') = -\vec{v}\cdot\mathscr{L}(\vec{u}+\lambda\vec{u}')$

qui s'écrit : $\vec{v}\cdot[\mathscr{L}(\vec{u}) + \lambda\mathscr{L}(\vec{u}')] = \vec{v}\cdot\mathscr{L}(\vec{u}+\lambda\vec{u}')$

or ceci est vrai pour tout $\vec{v}$, donc $\mathscr{L}(\vec{u}) + \lambda\mathscr{L}(\vec{u}') = \mathscr{L}(\vec{u}+\lambda\vec{u}')$, cqfd.

PROPRIETE TRES IMPORTANTE : **$\mathscr{L}$ antisymétrique $\Leftrightarrow \exists\vec{R}$ unique, $\mathscr{L} = \vec{R}\wedge$**

Preuve succincte : $\mathscr{L}$ est linéaire, d'où, après choix d'une base orthonormée $\mathscr{L}$ représentée par une matrice $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans base choisie.

$\vec{u}\cdot\mathscr{L}(\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\mathscr{L}(\vec{u})$ s'écrit, après regroupements convenables de termes :

$$2a_{11}xx' + (a_1^2+a_2^1)(xy'+yx') + (a_1^3+a_3^1)(xz'+zx') + 2a_2^2yy' + (a_2^3+a_3^2)(yz'+zy') + 2a_3^3zz' = 0,$$

et ceci pour tous x, y, z, x', y', z', d'où : $a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = 0$, et $a_i^j = -a_j^i$ pour les autres termes de la matrice. Cette matrice est donc antisymétrique, on peut l'écrire $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, d'où $\mathscr{L}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -cy+bz \\ cx-az \\ -bx+ay \end{pmatrix}$, où l'on reconnaît, en posant $\vec{R} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, le produit vectoriel $\vec{R}\wedge\vec{u}$. $\vec{R}$ est unique, sinon un autre vecteur $\vec{R}'$ donnerait $\vec{R}'\wedge\vec{u} = \vec{R}\wedge\vec{u}$, d'où $(\vec{R}'-\vec{R})\wedge\vec{u} = \vec{0}$; $\vec{u}$ étant quelconque, on aurait $\vec{R}' = \vec{R}$.

- *Champ antisymétrique* : $\vec{H}$ est antisymétrique, s'il est affine et si son application linéaire associée est antisymétrique, autrement dit :

$$\forall P,\ \forall Q \quad \vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ}$$

(avec $\vec{R}$ unique)

- *Champ équiprojectif* : $\vec{H}$ est équiprojectif s'il vérifie :

$$\forall P,\ \forall Q \quad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{H}(P) = \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{H}(Q)$$

ce qui signifie : les projections de $\vec{H}(P)$ et $\vec{H}(Q)$ sur la droite PQ sont égales.

PROPRIETE CARACTERISTIQUE : **antisymétrique $\Leftrightarrow$ équiprojectif**

Preuve succincte : si $\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ}$, alors $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{H}(P)$ s'écrit $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{H}(Q) + \overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ})$; le produit mixte est nul, d'où résultat. Réciproquement, si $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{H}(P) = \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{H}(Q)$, on introduit un point arbitraire A et on écrit : $\overrightarrow{PQ}\cdot[\vec{H}(P)-\vec{H}(A)] = \overrightarrow{PQ}\cdot[\vec{H}(Q)-\vec{H}(A)]$, ce qui ne change rien à l'hypothèse, mais qui conduit à :

$$(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})\cdot[\vec{H}(P)-\vec{H}(A)] = (\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})\cdot[\vec{H}(Q)-\vec{H}(A)]$$

Or, $-\vec{AP}\cdot\vec{H}(P) + \vec{AP}\cdot\vec{H}(A) = 0$ et $\vec{AQ}\cdot\vec{H}(Q) - \vec{AQ}\cdot\vec{H}(A) = 0$ (équiprojectivité), donc il reste : $\vec{AQ}\cdot[\vec{H}(P) - \vec{H}(A)] = -\vec{AP}\cdot[\vec{H}(Q) - \vec{H}(A)]$

On définit l'application $\mathcal{L}$, pour A choisi, par $\mathcal{L}$: vecteur ⟶ vecteur, et par $\vec{AM} \longrightarrow \mathcal{L}(\vec{AM}) = \vec{H}(M) - \vec{H}(A)$. On voit que $\mathcal{L}$ vérifie : $\vec{AQ}\cdot\mathcal{L}(AP) = -\vec{AP}\cdot\mathcal{L}(\vec{AQ})$, donc $\mathcal{L}$ est antisymétrique, donc $\mathcal{L}$ est linéaire, (associée à $\vec{H}$), donc $\vec{H}$ est antisymétrique, cqfd.

2° - TORSEURS

DEFINITIONS :

On appelle *torseur* et on note $[\mathcal{T}]$ "l'être mathématique" $[\mathcal{T}] = [\vec{R},\vec{H}]$ formé d'un *vecteur* $\vec{R}$ et d'un *champ antisymétrique* $\vec{H}$, tels que $\vec{R}\wedge$ soit l'application (linéaire antisymétrique) associée à $\vec{H}$.

$\vec{R}$ est appelé *résultante générale* du torseur

$\vec{H}$ est appelé *moment* du torseur

On peut aussi définir un torseur comme étant seulement le champ $\vec{H}$, puisque pour $\vec{H}$ donné, $\vec{R}$ est implicitement connu. Nous ne le ferons pas.

ELEMENTS DE REDUCTION de $[\mathcal{T}] = [\vec{R},\vec{H}]$ en un point A dans un repère R_0 :

Sextuplet formé des composantes dans R_0 de la résultante $\vec{R}$ suivies de celles de $\vec{H}(A)$.

- $[\mathcal{T}]$ est déterminé par un tel sextuplet, puisque $\vec{R}$ est ainsi connu, et qu'en tout point P, on connaîtra $\vec{H}(P)$ par $\vec{H}(A) + \vec{R}\wedge\vec{AP}$, avec $\vec{H}(A)$ connu.

OPERATIONS SUR LES TORSEURS :

- *Egalité* : résultantes générales égales et moments égaux en 1 point, ou bien : moments égaux en 3 points non alignés.
- *Somme* de $[\mathcal{T}] = [\vec{R},\vec{H}]$ et $[\mathcal{T}'] = [\vec{R}',\vec{H}']$: torseur, noté $[\mathcal{T}] + [\mathcal{T}']$ défini par : $[\vec{R} + \vec{R}',\ \vec{H} + \vec{H}']$

  ($\vec{R} + \vec{R}'$: Somme vectorielle ; $\vec{H} + \vec{H}'$: Somme d'applications)

- *Produit par λ réel* : défini par $\lambda[\mathcal{T}] = [\lambda\vec{R}, \lambda\vec{H}]$, de même.
- *Torseur nul* : $[O] = [\vec{0}\ ,\ \vec{0}]$

  ($\vec{0}$: Vecteur nul ; $\vec{0}$: Application nulle)

- *Produit (ou comoment) de 2 torseurs* : quantité scalaire notée $[\mathcal{T}] \times [\mathcal{T}']$ définie par $\underline{\vec{R}\cdot\vec{H}'(P) + \vec{R}'\cdot\vec{H}(P),\ \forall P}$

La valeur est indépendante du point P car $\vec{R}.\vec{H}'(P) = \vec{R}.[\vec{H}'(Q) + \vec{R}'\wedge\vec{QP}]$, de même pour $\vec{R}'.\vec{H}(P)$, et les 2 produits mixtes s'éliminent (ils sont opposés).

ESPACE VECTORIEL DES TORSEURS :

Ensemble des torseurs, muni de la somme et du produit par les réels définis précédemment. *Dimension sur* $\mathbb{R}$: 6.

INVARIANT SCALAIRE D'UN TORSEUR :

Réel noté I, défini par $I = \vec{R}\cdot\vec{H}(P)$, indépendant de P puisque : $\vec{R}\cdot\vec{H}(Q) = \vec{R}\cdot\vec{H}(P) + \vec{R}\cdot[\vec{R}\wedge\vec{PQ}]$ et le produit mixte est nul.

INVARIANT VECTORIEL D'UN TORSEUR :

Vecteur noté $\vec{j}$, défini dans le cas général par $\vec{j} = \left[\vec{H}(P)\cdot\frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}\right]\frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} \equiv \frac{I}{\|\vec{R}\|^2}\vec{R}$.

- Si $\vec{R} = 0$, $\vec{j} = \vec{H}(P)$ (voir couples, 3°)

MOMENT D'UN TORSEUR PAR RAPPORT A UN AXE $(A,\vec{i})$, $\vec{i}$ unitaire :

Nombre réel défini par : $\vec{H}(P)\cdot\vec{i}$, $\forall P \in$ axe $(A,\vec{i})$

ce nombre ne dépend pas de P (pris sur l'axe), car si Q est sur l'axe, $\vec{H}(Q)\cdot\vec{i} = \vec{H}(P)\cdot\vec{i}$ par équiprojectivité de $\vec{H}$.

- En général, le mot "moment" évoque un vecteur, ici il s'agit d'un scalaire, ne pas confondre.
- Dans l'invariant vectoriel, on constate que la composante sur l'axe $\left(P, \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}\right)$ est le moment du torseur par rapport à cet axe.

3° - TORSEURS PARTICULIERS : GLISSEUR, COUPLE

- *Vecteur lié* $(A,\vec{R})$: point A et vecteur $\vec{R}$ dont le support Δ passe par A.

  A est appelé *origine*, ou *point d'application*, du vecteur lié

  Δ est appelé *support* du vecteur lié

- *Vecteur glissant associé au vecteur lié* $(A,\vec{R})$: classe de tous les vecteurs liés $(B,\vec{R})$ tels que B décrit le support de $(A,\vec{R})$

- *Moments des vecteurs précédents* : pour le vecteur lié $(A,\vec{R})$ comme pour le vecteur glissant associé, le moment est le champ $\vec{\mathcal{M}}(A,\vec{R})$, "point ⟶ vecteur", tel que :

$$P \longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_P(A,\vec{R}) = \vec{PA}\wedge\vec{R}$$

car si $B \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}_P(B,\vec{R}) = (\vec{PA}+\vec{AB})\wedge\vec{R}$, et $\vec{AB}\wedge\vec{R} = \vec{0}$ par colinéarité.

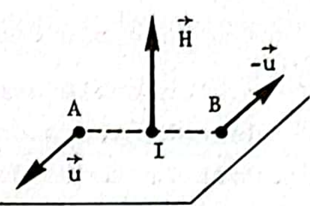
- *GLISSEUR* : torseur $[\vec{R},\vec{H}]$ vérifiant l'une des 3 propriétés suivantes (équivalentes).
  1. Il existe un vecteur lié $(A,\vec{R})$ tel que $\vec{H}(P) = \vec{PA}\wedge\vec{R}$, $\forall P$ (alors le vecteur lié est aussi appelé glisseur, en pratique).
  2. Il existe un point *A tel que* $\vec{H}(A) = \vec{0}$ (alors en tout point B de l'axe $(A,\vec{R})$, $\vec{H}(B) = \vec{0}$. Cet axe est le *support* du vecteur lié ou du glisseur associés).
  3. L'*invariant scalaire est nul*, mais $\vec{R} \neq \vec{0}$ (alors $\vec{H}(P) \perp \vec{R}$, $\vec{H}(P)$ n'étant nul que pour P sur l'axe $(A,\vec{R})$).

- *COUPLE* : torseur de type $[\vec{0},\vec{H}]$, c'est-à-dire vérifiant l'une des 3 propriétés suivantes (équivalentes).

1. *Résultante générale nulle.*
2. *Moment uniforme*, $\vec{H}(Q) = \vec{H}(P)$, $\forall P$, $\forall Q$
3. Il existe 2 "glisseurs opposés" $(A,\vec{u})$, $(B,-\vec{u})$, dont il est la somme (au sens de l'addition des torseurs).

   En effet : résultante générale : $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$; moment en P :

   $$\overrightarrow{PA} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{PB} \wedge (-\vec{u}) \equiv \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}, \text{ constant}$$



Intreprétation : $\vec{H}$, moment constant du couple, est orthogonal au plan $(\overrightarrow{AB},\vec{u})$. Au milieu I de $\overrightarrow{AB}$, on peut "voir" $\vec{H}$ comme un axe autour duquel le couple "aurait tendance" à faire tourner AB (dans le "sens" de $\vec{u}$).
La direction du moment $\vec{H}$ est appelée *axe du couple*.

4° - DECOMPOSITIONS D'UN TORSEUR - AXE CENTRAL

1ère DECOMPOSITION, "en un point A" :

$[\mathscr{C}] = [\vec{R},\vec{H}]$ étant donné, le point A étant donné, il existe *un glisseur* $[\mathscr{G}]$ associé au vecteur lié $(A,\vec{R})$ et *un couple* $[\mathscr{C}]$ de moment $\vec{H}(A)$ en tout point P, tels que : $[\mathscr{C}] = [\mathscr{G}] + [\mathscr{C}]$, $[\mathscr{G}]$ et $[\mathscr{C}]$ *uniques*.

Preuve succincte : le moment du glisseur vérifie $\vec{\mathscr{M}}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}$, donc le moment $\vec{H}$ de $[\mathscr{C}]$ est bien tel que $\vec{H}(P) = \vec{H}(A) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}$; les résultantes générales sont $\vec{0}$ et $\vec{R}$, donc celle de $[\mathscr{C}]$ est bien $\vec{R}$; l'unicité est immédiate.

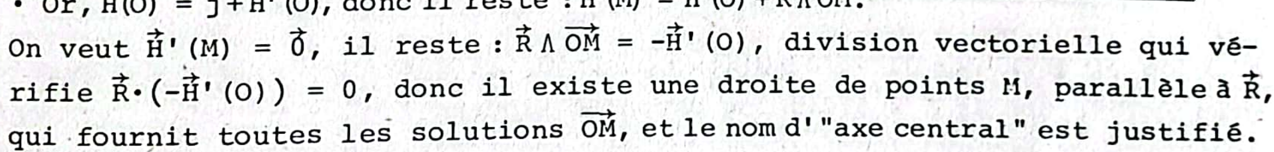
AXE CENTRAL D'UN TORSEUR $[\mathscr{C}] = [\vec{R},\vec{H}]$:

Ensemble des points M tels que $\vec{H}(M) \wedge \vec{R} = \vec{0}$ $\quad(\vec{H}(M) /\!/ \vec{R})$

Justification : le cas $\vec{R} = \vec{0}$ est sans intérêt ; on a un couple.

Pour $\vec{R} \neq \vec{0}$, soit M un point quelconque, on décompose $\vec{H}(M)$ en $\vec{j} + \vec{H}'(M)$, ou $\vec{j}$ est l'invariant vectoriél $\left[\vec{H}(M)\cdot\dfrac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}\right]\dfrac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$, et $\vec{H}'(M)$ la projection de $\vec{H}(M)$ dans le plan orthogonal à $\vec{R}$.

- Si O est une origine (arbitraire), on a :
  $\vec{H}(M) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$, soit : $\vec{j} + \vec{H}'(M) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$.
- Or, $\vec{H}(O) = \vec{j} + \vec{H}'(O)$, donc il reste : $\vec{H}'(M) = \vec{H}'(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$.


On veut $\vec{H}'(M) = \vec{0}$, il reste : $\vec{R} \wedge \overrightarrow{OM} = -\vec{H}'(O)$, division vectorielle qui vérifie $\vec{R}\cdot(-\vec{H}'(O)) = 0$, donc il existe une droite de points M, parallèle à $\vec{R}$, qui fournit toutes les solutions $\overrightarrow{OM}$, et le nom d'"axe central" est justifié.

2ème DECOMPOSITION :

Tout torseur $[\mathscr{C}] = [\vec{R},\vec{H}]$ qui n'est pas un couple, est la *somme* d'un *couple* $[\mathscr{C}]$ et d'un *glisseur* $[\mathscr{G}]$ dont *les axes sont colinéaires*, et qui sont *uniques*.

Preuve succincte : c'est la justification précédente.

L'axe central Δ du torseur $[\mathscr{C}]$ est aussi le support, ou l'axe, du glisseur $[\mathscr{G}]$, $\vec{R}$ est la résultante générale de $[\mathscr{G}]$. Pour le couple $[\mathscr{C}]$, le

moment est l'invariant vectoriel de [$\mathscr{C}$], c'est-à-dire :

$$\vec{J} = \left[\vec{H}(P) \cdot \frac{\vec{R}}{||\vec{R}||}\right] \frac{\vec{R}}{||\vec{R}||}$$

L'unicité est immédiate.

5° - COMPLEMENTS SUR LES TORSEURS

• L'ensemble des *couples* est un *sous-espace* vectoriel de celui des torseurs.

• L'ensemble des *glisseurs n'est pas un sous-espace*..., mais l'ensemble des glisseurs dont *l'axe passe par un point donné* A est un *sous-espace*, dont la somme directe avec celui des couples redonne l'espace des torseurs.

• L'*axe central* Δ du torseur [$\vec{R},\vec{H}$] est l'ensemble des points M où $\vec{H}(M)$ a une *norme minimale*.

• L'ensemble des torseurs peut être classé en fonction de l'invariant scalaire $I = \vec{R}\cdot\vec{H}(P)$ de [$\mathscr{C}$] = [$\vec{R},\vec{H}$]

. Si $I \neq 0$, [$\mathscr{C}$] n'est ni couple, ni glisseur, il se décompose en couple + glisseur non nuls.

. Si $I = 0$, a) si $\vec{R} \neq \vec{0}$, [$\mathscr{C}$] est un glisseur non nul.

b) si $\vec{R} = \vec{0}$ - ou bien $\vec{H}(P) \neq \vec{0}$, [$\mathscr{C}$] est un couple non nul.

- ou bien $\vec{H}(P) = \vec{0}$, [$\mathscr{C}$] est le torseur nul.

CHAPITRE 10

CINEMATIQUE DU SOLIDE COMPOSITION DES MOUVEMENTS

Comme dans le cas du point, la cinématique du solide étudie les mouvements sans s'occuper de leurs causes.

1° - VITESSES - VECTEUR ROTATION INSTANTANEE - TORSEUR CINEMATIQUE

SOLIDE :

Ensemble de particules (considérées comme des points) dont les distances mutuelles restent constantes, ce qui traduit l'indéformabilité du solide (vraie au niveau de ce livre).

REPERE LIE AU SOLIDE :

A un solide S, on lie souvent un repère, on le note encore S, ou bien R par exemple, (orthonormé et orienté). L'origine est une particule de S (ou invariablement liée à S), les 3 axes passent par 3 particules de S (ou invariablement liées à S).

MOUVEMENT, IMMOBILITE, PAR RAPPORT A UN REPERE R_0

- Le solide (ou le repère) S est en *mouvement* dans R_0, si au moins un point $M \in S$ (M lié à S) est en mouvement dans R_0.
- Le solide (ou le repère) S est *immobile* dans R_0, si tous ses points sont fixes (de coordonnées constantes) dans R_0. La fixité de 3 points non alignés suffit. On dit aussi que S est *fixe* dans R_0.

CHAMP DES VITESSES de S/R_0 :

Soit S le solide en mouvement dans R_0, soient P et Q deux points de S ($P \in S, Q \in S$). S est un solide, signifie $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \text{constante}$. On dérive par rapport à t et à la base de R_0, en notant $\left(\frac{d}{dt}\right)_{R_0}$ selon l'habitude (R_0 au lieu de la *base* de R_0) :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \left[\frac{d\,\overrightarrow{PQ}}{dt}\right]_{R_0} = 0 \quad \text{s'écrit aussi :} \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \left[\left(\frac{d\,\overrightarrow{AQ}}{dt}\right)_{R_0} - \left(\frac{d\,\overrightarrow{AP}}{dt}\right)_{R_0}\right] = 0$$

où A désigne un point lié à R_0. D'où $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V}_{R_0}(Q \in S) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V}_{R_0}(P \in S)$, donc le champ $\vec{V}_{R_0} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, qui associe à chaque point lié à S sa vitesse par rapport à R_0, est équiprojectif (ou aussi antisymétrique). Ce champ possède une résultante générale, qu'on note $\vec{\Omega}(S/R_0)$.

TORSEUR CINEMATIQUE (du solide S en mouvement dans R_0) :

Torseur, noté par exemple $[\mathcal{V}]$ ou $[\mathcal{V}(S/R_0)]$ défini par :

$$\underline{[\mathcal{V}(S/R_0)] = [\vec{\Omega}(S/R_0), \vec{V}_{R_0}]}, \quad \vec{\Omega}(S/R_0) \text{ et } \vec{V}_{R_0} \text{ ci-dessus.}$$

- $\vec{\Omega}(S/R_0)$, résultante générale, est appelé : vecteur *rotation instantanée* (de S par rapport à R_0).
- $\vec{V}_{R_0}$, moment du torseur, est le *champ des vitesses* déjà dit, et connaissant $\vec{V}_{R_0}(P \in S)$, on déduit la vitesse de tout point Q lié à S, par :

$$\vec{V}_{R_0}(Q \in S) = \vec{V}_{R_0}(P \in S) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{PQ}$$

2° - THEOREMES DE DERIVATION - CALCUL DE $\vec{\Omega}(S/R_0)$

1er THEOREME FONDAMENTAL DE DERIVATION :

Si R est un repère ou un solide en mouvement dans R_0, alors *pour tout* $\vec{u}$ *lié à* R : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{u}$.

Preuve succincte : $\vec{u}$ lié à R signifie que, pour tout bipoint $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, l'on a P et Q liés à R. On sait $\vec{V}_{R_0}(Q) = \vec{V}_{R_0}(P) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{PQ}$, cela s'écrit : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{PQ}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{PQ}$, d'où résultat puisque $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

CONSEQUENCE : 1ère METHODE DE CALCUL DE $\vec{\Omega}(R/R_0)$:

Si $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est base de R, et en écrivant $\left(\frac{d}{dt}\right)_{R_0}$ au lieu de $\left(\frac{d}{dt}\right)_{B_0}$ pour ne pas alourdir la compréhension (B_0 = base de R_0), on a :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \frac{1}{2}\left[\vec{x} \wedge \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{y} \wedge \left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{z} \wedge \left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{R_0}\right]$$

Preuve succincte : en notation simplifiée, $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{x}$ d'après le théorème précédent, et de même pour $\frac{d\vec{y}}{dt}$ et $\frac{d\vec{z}}{dt}$.

On calcule $\vec{x} \wedge \frac{d\vec{x}}{dt}$, d'où $\vec{x} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})$, d'où $\vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{x})\vec{x}$, de même avec les $\vec{y}$ et $\vec{z}$. En ajoutant, on a $\vec{x} \wedge \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{y} \wedge \frac{d\vec{y}}{dt} + \vec{z} \wedge \frac{d\vec{z}}{dt} = 3\vec{\Omega} - \vec{\Omega}$, puisque $(\vec{\Omega} \cdot \vec{x})\vec{x} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{y})\vec{y} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{z})\vec{z} \equiv \vec{\Omega}$, d'où résultat.

2ème THEOREME FONDAMENTAL DE DERIVATION :

Si R est en mouvement dans R_0, alors :

$$\textit{quel que soit } \vec{u} \qquad \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{u}$$

Remarque : si $\vec{u}$ lié à R, on a $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R} = \vec{0}$, on retrouve le 1er théorème.

Preuve succincte : on pose $\vec{u} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de R et on obtient : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = (\dot{X}\vec{x} + \dot{Y}\vec{y} + \dot{Z}\vec{z}) + \left(X\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{R_0} + Y\left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{R_0} + Z\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{R_0}\right)$

d'où respectivement : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{u}$.

CONSEQUENCE : 2ème METHODE DE CALCUL DE $\vec{\Omega}(R/R_0)$:

a) Si R (ou sa base) se déduit de R_0 (ou sa base) par une *rotation* d'angle $\alpha(t)$ autour d'une *direction* $\vec{u}$ qui est *fixe à la fois dans* R et R_0, alors :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\alpha}\,\vec{u}$$

Preuve : on peut supposer R_0 de base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{u})$ et R de base $(\vec{x},\vec{y},\vec{u})$ de sorte que $\alpha = \widehat{\vec{x}_0,\vec{x}} = \widehat{\vec{y}_0,\vec{y}}$. La 1ère méthode donne :

$$\vec{\Omega}(R,R_0) = \frac{1}{2}[\vec{x} \wedge (\dot{\alpha}\,\vec{y}) + \vec{y} \wedge (-\dot{\alpha}\,\vec{x})] \equiv \dot{\alpha}\,\vec{x} \wedge \vec{y} \equiv \dot{\alpha}\,\vec{u}, \text{ cqfd.}$$

b) $\underline{\vec{\Omega}(R/R_0) = -\vec{\Omega}(R_0/R)}$

Preuve : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{u}$ s'écrit en échangeant R et R_0

$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{\Omega}(R_0/R) \wedge \vec{u}$; on porte dans la précédente et il

reste : $\vec{0} = \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{u} + \vec{\Omega}(R_0/R) \wedge \vec{u}$, et comme $\vec{u}$ est quelconque, il

reste : $\vec{\Omega}(R/R_0) + \vec{\Omega}(R_0/R) = \vec{0}$.

c) Si R_2 est mobile dans R_1 et R_1 mobile dans R_0, alors :

$\underline{\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)}$ (cf. formule de Chasles).

Preuve : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{u}$, mis dans $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{u}$

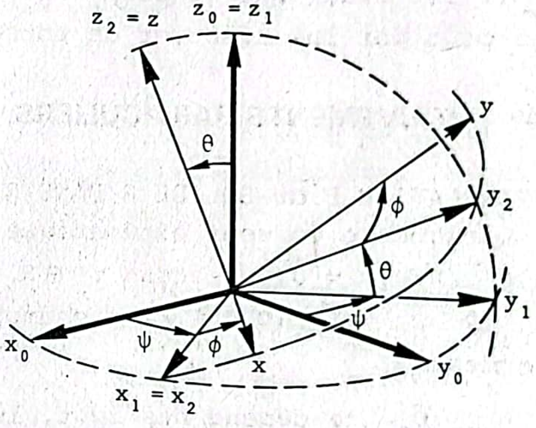
donne : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_2} + [\vec{\Omega}(R_2,R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)] \wedge \vec{u}$. Il suffit de comparer

avec : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{u}$ puisque $\vec{u}$ est quelconque.

d) *Conclusion* : On obtient tout vecteur de type $\vec{\Omega}(R/R_0)$ en ajoutant les "vecteurs $\vec{\Omega}$ successifs" correspondant aux diverses rotations qui amènent la base de R_0 sur celle de R.

EXEMPLE TRES IMPORTANT : ANGLES D'EULER

Malgré le dessin ci-contre, il n'est pas important que les repères R_0 (de base $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$), R_1 (de base $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_1$), R_2 (de base $\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$, $\vec{z}_2$) et R (de base x, y, z) aient la même origine.



On peut passer de $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par la suite des rotations vectorielles :

1. $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{angle } \psi,\ \text{axe } \vec{z}_0 = \vec{z}_1} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$. ψ est la *précession*.

2. $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{angle } \Theta,\ \text{axe } \vec{x}_1 = \vec{x}_2} (\vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Θ est la *nutation*.

3. $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \xrightarrow{\text{angle } \phi,\ \text{axe } \vec{z}_2 = \vec{z}} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{z}_2)$. ϕ est la *rotation propre*

D'après a) puis d) on a : $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$, $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\Theta}\,\vec{x}_1 \equiv \dot{\Theta}\,\vec{x}_2$,

et $\vec{\Omega}(R/R_2) = \dot{\phi}\,\vec{z}_2 \equiv \dot{\phi}\,\vec{z}$, d'où : $\underline{\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\Theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\phi}\,\vec{z}}$

Composantes de $\vec{\Omega}(R/R_0)$

sur $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
$$\begin{cases} p_0 = \dot{\phi} \sin\Theta \sin\psi + \dot{\Theta}\cos\psi \\ q_0 = -\dot{\phi}\sin\Theta\cos\psi + \dot{\Theta}\sin\psi \\ r_0 = \dot{\phi}\cos\Theta + \dot{\psi} \end{cases}$$
peu employées.

sur $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
$$\begin{cases} p_1 = \dot{\Theta} \\ q_1 = -\dot{\phi}\sin\Theta \\ r_1 = \dot{\phi}\cos\Theta + \dot{\psi} \end{cases}$$
parfois employées.

sur $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (base de *Résal*)
$$\begin{cases} p_2 = \dot{\Theta} \\ q_2 = \dot{\psi}\sin\Theta \\ r_2 = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\phi} \end{cases}$$
très employées.

sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\Theta\sin\phi + \dot{\Theta}\cos\phi \\ q = \dot{\psi}\sin\Theta\cos\phi - \dot{\Theta}\sin\phi \\ r = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\phi} \end{cases}$$
parfois employées.

3° - ACCELERATIONS

On revient au 1°. On a trouvé $\vec{V}_{R_0}(Q\in S) = \vec{V}_{R_0}(P\in S) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{PQ}$, on dérive par rapport à t dans R_0, et à l'aide des théorèmes de dérivation, on obtient la *formule des accélérations* des points (P,Q,...) d'un solide S :

$$\vec{\Gamma}_{R_0}(Q\in S) = \vec{\Gamma}_{R_0}(P\in S) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}\wedge\overrightarrow{PQ} + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{PQ}).$$

Il est clair que le champ $\vec{\Gamma}_{R_0}$ *n'est pas équiprojectif*, autrement dit : on ne peut pas lui associer de torseur, contrairement au champ des vitesses.

4° - MOUVEMENTS PARTICULIERS

TRANSLATION D'UN SOLIDE R DANS R_0 :

Lorsque le torseur cinématique $[\mathcal{V}(R/R_0)]$ se réduit à un *couple*, autrement dit $\vec{\Omega}(R/R_0) = \vec{0}$, ou aussi $\forall P\in R$, $\forall Q\in R$: $\vec{V}_{R_0}(P\in R) = \vec{V}_{R_0}(Q\in R)$. Alors : $\vec{\Gamma}_{R_0}(P\in R) = \vec{\Gamma}_{R_0}(Q\in R)$, les champs de vitesses et d'accélérations sont uniformes.

- Si $\vec{V}_{R_0}$ ne dépend pas de t, le mouvement de R est rectiligne uniforme, toutes les trajectoires étant des droites parallèles.
- Si $\vec{V}_{R_0}$ varie avec t, on peut avoir des trajectoires rectilignes ou non (circulaires, ...).

ROTATION D'UN SOLIDE R AUTOUR D'UN AXE LIE A R ET A R_0 :

Lorsque le torseur cinématique $[\mathcal{V}(R/R_0)]$ se réduit à un *glisseur*, autrement dit $\vec{\Omega}(R/R_0) \neq \vec{0}$ et le support de $\vec{\Omega}(R/R_0)$ est fixe dans R et dans R_0. Si Θ est l'angle dont tourne R autour de ce support, $\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\Theta}\vec{u}$ ($\vec{u}$ unitaire de ce support), et $\vec{V}_{R_0}(M\in R) = \dot{\Theta}\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}$ (A : point du support), donc tout point M lié à R décrit un cercle d'axe $(A,\vec{u})$ et $\vec{V}_{R_0}(M\in R)\perp\vec{u}$.

MOUVEMENT HELICOIDAL (DE R PAR RAPPORT A R_0) :

Lorsque l'axe *central* $(A,\vec{u})$ du torseur cinématique $[\mathcal{V}(R/R_0)]$ est *fixe dans* R_0 et l'invariant vectoriel $\vec{J}$ de forme $\vec{J} = \lambda\vec{\Omega}(R/R_0)$, λ *constant*.

Le mouvement de tout point M lié à R résulte alors d'une translation parallèle à $\vec{\Omega}(R/R_0)$ et d'une rotation d'axe dirigé par $\vec{\Omega}(R/R_0)$, sa trajectoire dans R_0 est une hélice circulaire.

DEFINITION :

On appelle *mouvements tangents à l'instant t*, des mouvements ayant *même champ des vitesses à l'instant t*.

CONSEQUENCE :

Tout mouvement de solide est tangent à chaque instant, dans le cas général, à un mouvement hélicoïdal dont l'axe varie avec t. Cet axe est appelé *axe instantané de rotation et glissement* (en abrégé : a.i.r.g.).

5° - COMPOSITION DES MOUVEMENTS : NOUVELLES FORMULES

• Au Chapitre 5, on a considéré un point M, en mouvement dans R_1 (relatif) avec R_1 mobile dans R_0 (absolu), on a posé :
$\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dans R_1, on a obtenu : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$;
plus précisément :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R_0) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0}, \quad \vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/R_1) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M\in R_1/R_0) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0 \text{ et } M\in R_1}$$

1. *Nouvelle formule pour* $\vec{V}_e$:

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{AM}, \text{ où } A\in R_1$$

Preuve : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, A étant lié à R_1, donc $\overrightarrow{AM}$ aussi lors du calcul de $\vec{V}_e$, d'où, par le 1er théorème de dérivation de ce chapitre, le remplacement de : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R_0}$, $\overrightarrow{AM}\in R_1$ par $\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{AM}$.

• De même, $\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c + \vec{\Gamma}_r$ traduisait : $\vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M\ \ R_1/R_0) + \vec{\Gamma}_c(M) + \vec{\Gamma}(M/R_1)$.

2. *Nouvelle formule pour* Γ_r :

$$\vec{\Gamma}_r(M) = \left(\frac{d\,\vec{V}_r(M)}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{V}_r(M)$$

car : $\left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{V}_r$, et $\left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R_1} \equiv \vec{\Gamma}_r$; on transpose.

3. *Nouvelle formule pour* $\vec{\Gamma}_e$:

$$\vec{\Gamma}_e(M) = \left(\frac{d\,\vec{V}_e(M)}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}_r(M)$$

car on avait $\vec{\Gamma}_e(M) = \vec{\Gamma}(A/R_0) + \left[x\left(\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}\right)_{R_0} + \dots\right]$ et $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(A/R_0) + \left[x\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + \dots\right]$

on écrit $$\left(\frac{d\,\vec{V}_e(M)}{dt}\right)_{R_0} = \underbrace{\Gamma(A/R_0) + \left[x\left(\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}\right)_{R_0} + \dots\right]}_{\vec{\Gamma}_e(M)} + \underbrace{\left[\dot{x}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + \dots\right]}_{\dot{x}\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{i} + \dots}$$

Les derniers termes donnent $\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\dot{x}\,\vec{i} + \dots)$, soit $\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}_r(M)$.

4. *Nouvelle formule pour* $\vec{\Gamma}_c$:

$$\vec{\Gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}_r(M)$$

car $\vec{\Gamma}_c(M) = 2\left[\dot{x}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + \dots\right] \equiv 2\left[\dot{x}\,\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{i} + \dots\right] \equiv 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}_r(M)$.

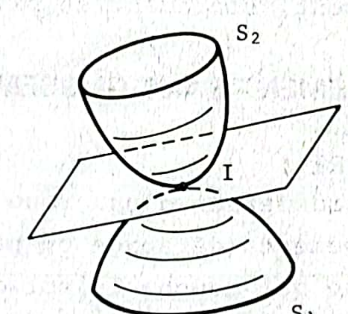
CHAPITRE 11

SOLIDES EN CONTACT - ROULEMENT - GLISSEMENT MOUVEMENTS PLAN sur PLAN

1° - DEFINITIONS

a) Si deux solides sont de types "volume" ou "surface", soient S_1 et S_2 leurs surfaces extérieures. En langage courant, on dit que ces solides sont en contact lorsque S_1 et S_2 ont au moins un point commun.

Au niveau de ce livre, on dit que les solides sont en contact lorsque S_1 et S_2 ont *un seul point commun* I, avec *un seul plan tangent commun en* I.



b) Si l'un des deux solides est *une courbe*, (l'autre, volume ou surface), de même on ne considère que des contacts par un seul point I, avec la tangente (unique) en I à la courbe, situé dans le plan tangent (unique) en I à l'autre solide.

c) Si les deux solides sont *des courbes*, on suppose de même le contact en un seul point I (non singulier) avec une seule tangente commune en I (définie par le même "$\vec{\tau} = \frac{d\,\vec{OM}}{ds}$" pour chacune des courbes).

IMPORTANT :

à chaque instant t où l'on étudie un contact, il y a 3 "points I".

1. Le point *géométrique* I, appelé point de contact, noté seulement I.
2. La *particule de* S_1 qui est au même endroit que I, notée $I \in S_1$.
3. La *particule de* S_2 qui est au même endroit que I, notée $I \in S_2$.

DEFINITIONS relatives aux notions précédentes.

- *Glissement*, ou vitesse de glissement, de S_2 par rapport à S_1 :
  vecteur, noté $\vec{V}_g(S_2/S_1)$ ou bien $\vec{V}_I$ défini par :

$$\underline{\vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/S_1) \equiv \vec{V}(I \in S_2/R) - \vec{V}(I \in S_1/R)}$$

où R *est un repère arbitraire.*

- *Roulement*, ou vecteur roulement, de S_2 par rapport à S_1 :
  vecteur, noté $\vec{\Omega}_T(S_2/S_1)$, défini par :

$$\underline{\vec{\Omega}_T(S_2/S_1) = \text{Projection dans le plan tangent en I, de } \vec{\Omega}(S_2/S_1)}$$

- *Pivotement*, ou vecteur pivotement, de S_2 par rapport à S_1 :
  vecteur, noté $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$, défini par :
  $$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) - \vec{\Omega}_T(S_2/S_1).$$
  ce vecteur est normal au plan tangent (ou à la tangente) en I.

REMARQUES :

La vitesse de glissement est coplanaire au plan tangent (ou colinéaire à la tangente) en I.

Glissement, roulement et pivotement ne dépendent que du mouvement S_2/S_1.

2° - ROULEMENT SANS GLISSEMENT

COMMENTAIRE :

La considération d'une roue S_2 roulant sur le sol S_1 conduit à dire qu'il y a glissement (dérapage ou patinage en langage courant) lorsque la partie de la roue qui touche le sol a une vitesse non nulle par rapport au sol. De même, non glissement lorsqu'au moment où la partie de roue touche le sol, elle a une vitesse nulle par rapport au sol. D'où la définition :

S_2 roule sans glisser sur S_1, lorsque $\vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{0}$

- Autrement dit : à l'instant du contact, lorsque $I \in S_2$ est confondu avec $I \in S_1$ (et avec le point de contact I), on a roulement sans glissement pour $\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}$.
- *Propriété* : dans un roulement sans glissement, les traces laissées par le point de contact I sur S_1 et S_2 sont des courbes dont "les arcs parcourus en des temps égaux sont égaux". Cette propriété reste vraie pour des courbes roulant sans glisser, dans les conditions précisées au 1°, c.
- On définirait de même le non roulement par $\vec{\Omega}_T(S_2/S_1) = \vec{0}$, et le non pivotement par $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = \vec{0}$.

3° - EXEMPLE DE LA ROUE VERTICALE

On "mathématise" le cas de la roue S_2 qui resterait verticale et au contact du sol horizontal S_1, par exemple comme suit.

DONNEES ET NOTATIONS :

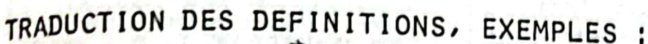
R_0, repère représenté par $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ orthonormé et orienté. Sur le plan (O,x_0,y_0) représentant S_1, et du côté $z_0 > 0$, on pose un cercle S_2 de centre A de rayon a, de sorte que son plan reste "vertical", c'est-à-dire parallèle à $\vec{z}_0$, et que le contact en I soit constamment réalisé ensuite, ce qui se traduit par $\overrightarrow{IA} = a\,\vec{z}_0$, $\forall t$.

• On pose $\overrightarrow{OI} = X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0$. On définit le repère $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par les considérations (suffisantes) : $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$, $(A, \vec{y}_1)$ = axe du cercle ; donc $\vec{x}_1$ est coplanaire avec $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On pose $\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1} = \psi$.

REMARQUE :

R_1 n'est pas lié au cercle.

• Enfin, si M est une particule du cercle, on pose $\widehat{\overrightarrow{Az_1}, \overrightarrow{AM}} = \phi$.



TRADUCTION DES DEFINITIONS, EXEMPLES :

• *Glissement* : $\vec{V}_g(S_2/R_0) = \vec{V}(I \in \text{cercle} / R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \overrightarrow{AI}$, avec $\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{y}_1$, il vient : $\vec{V}_g(S_2/R_0) = \dot{X}\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0 - a\dot{\phi}\vec{x}_1$

• *Roulement* : projection de $\vec{\Omega}(S_2/R_0)$ sur $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$, d'où : $\vec{\Omega}_T(S_2/R_0) = \dot{\phi}\vec{y}_1$

• *Pivotement* : $(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_T)$ donne : $\vec{\Omega}_n(S_2/S_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0$.

• *Roulement sans glissement* : alors $\dot{X}\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0 - a\dot{\phi}\vec{x}_1 = \vec{0}$, et en projetant sur une base, on a l'un ou l'autre des deux systèmes (équivalents) :

$$\begin{cases} \dot{X} - a\dot{\phi}\cos\psi = 0 \\ \dot{Y} - a\dot{\phi}\sin\psi = 0 \end{cases} \text{ sur } (\vec{x}_0, \vec{y}_0), \text{ ou } \begin{cases} \dot{X}\cos\psi + \dot{Y}\sin\psi - a\dot{\phi} = 0 \\ -\dot{X}\sin\psi + \dot{Y}\cos\psi = 0 \end{cases} \text{ sur } (\vec{x}_1, \vec{y}_1).$$

• *Non pivotement* : $\vec{\Omega}_n = \vec{0}$, d'où $\dot{\psi} = 0$, donc ψ reste constant (prévisible !)

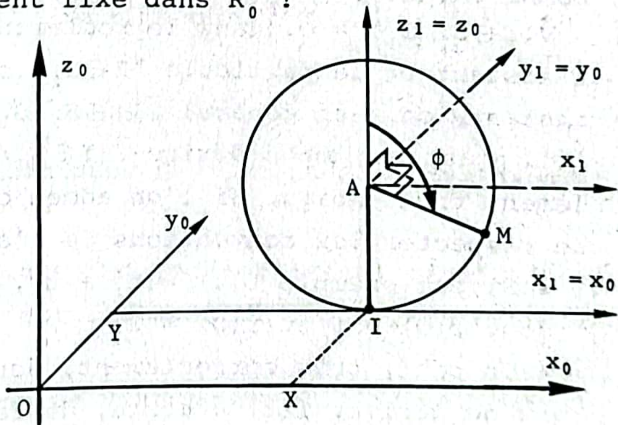
• *Non roulement* : $\vec{\Omega}_T = \vec{0}$, d'où $\dot{\phi} = 0$, donc ϕ reste constant (prévisible !)

ETUDE D'UN CAS "MITIGÉ" :

Supposons dans tout ce qui suit, le non pivotement. Alors, on peut toujours prendre $\psi \equiv 0$, ce qui signifie : le plan du cercle reste parallèle à $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$; mais ce plan n'est pas forcément fixe dans R_0 !

On a alors $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$, et le glissement devient :

$$\vec{V}_g(S_2/R_0) = (\dot{X} - a\dot{\phi})\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0.$$



a) Si l'on suppose de plus le *roulement sans glissement*, on a $\dot{X} - a\dot{\phi} = 0$ et $\dot{Y} = 0$. Ainsi Y reste constant, le plan du cercle reste fixe, et $X = a\phi + C^{te}$, donc la trace de I décrit des "arcs égaux" sur le plan et sur le cercle.

b) Revenons au cas initial (non pivotement), et supposons de plus *non roulement*, c'est-à-dire $\dot{\phi} = 0$. Il reste pour le glissement : $\vec{V}_g(S_2/R_0) = \dot{X}\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0$

autrement dit X et Y varient en général tous les deux, ce qui prouve que le cercle "dérape en bloc", I décrivant une certaine trajectoire dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, à la manière dont une roue "bloquée" peut déraper lorsqu'une voiture "part en crabe".

CALCULS CLASSIQUES, RELATIFS A DES SOLIDES EN CONTACT

Il s'agit des calculs de $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ (déjà fait), mais aussi de $\vec{\Gamma}(I \in S_2/S_1)$, qui n'est pas nul en général, même si $\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}$.

- *1ère méthode* (en général longue) : considérer une particule quelconque M *liée* à S_2, et calculer "in extenso" $\vec{V}(M/S_1)$ et $\vec{\Gamma}(M/S_1)$. Alors, mettre M en I, c'est-à-dire faire $\phi = \frac{\pi}{2}$ dans les résultats, mais évidemment $\dot{\phi}$ reste $\dot{\phi}$, car $\phi(t) = \frac{\pi}{2}$ seulement à l'instant du contact. De même pour $\ddot{\phi}$.

- *2ème méthode*, on a déjà vu qu'avec A lié à S_2, on obtenait :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(A/S_1) + \vec{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \overrightarrow{AI}.$$

Dans l'exemple, on obtient ainsi $\dot{X}\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0 - a\dot{\phi}\vec{x}_1$.

Alors, pour $\vec{\Gamma}(I \in S_2/S_1)$, on ne dérive *pas le résultat* $\dot{X}\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0 - a\dot{\phi}\vec{x}_1$, mais on emploie la formule du champ des accélérations, d'où :

$$\vec{\Gamma}(I \in S_2/S_1) = \vec{\Gamma}(A/S_1) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_2/S_1)}{dt}\right)_{S_1} \wedge \overrightarrow{AI} + \vec{\Omega}(S_2/S_1) \wedge [\vec{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \overrightarrow{AI}]$$

Dans l'exemple, on obtient : $\ddot{X}\vec{x}_0 + \ddot{Y}\vec{y}_0 - a\ddot{\phi}\vec{x}_1 - 2a\dot{\phi}\dot{\psi}\vec{y}_1 + a\dot{\phi}^2\vec{z}_0$.

S'il y a roulement sans glissement, on n'en tient compte qu'après le calcul, d'où $\dot{X}\vec{x}_0 + \dot{Y}\vec{y}_0 - a\dot{\phi}\vec{x}_1 = \vec{0}$ implique, en dérivant dans R_0, que sa dérivée est aussi nulle, soit : $\ddot{X}\vec{x}_0 + \ddot{Y}\vec{y}_0 - a\ddot{\phi}\vec{x}_1 - a\dot{\phi}\dot{\psi}\vec{y}_1 = 0$, il subsiste encore : $\vec{\Gamma}(I \in S_2/R_0) = -a\dot{\phi}\dot{\psi}\vec{y}_1 + a\dot{\phi}^2\vec{z}_0$.

. Si de plus, on avait non pivotement ($\dot{\psi} = 0$) il resterait encore $\vec{\Gamma}(I \in S_2/R_0) = a\dot{\phi}^2\vec{z}_0$.

COMMENTAIRES :

$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}$, dans le roulement sans glissement, est une propriété à l'instant où la particule "$I \in S_2$" se trouve au contact avec S_1, donc à cet instant, on a en général $\vec{\Gamma}(I \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$.

Il n'est pas faux d'écrire $\vec{\Gamma}(I \in S_2/S_1) = \frac{d}{dt}[\vec{V}(I \in S_2/S_1)]_{S_1, I \in S_2}$, c'est seulement très ambigu. Si l'on admet cette écriture, il est alors fondamental de respecter les conventions de l'analyse, à savoir :

- Si par exemple $f(t) = t^3 + t^2$, on sait $\dot{f}(t) = 3t^2 + 2t$ et $\ddot{f}(t) = 6t + 2$, donc $\dot{f}(0) = 0$ et $\ddot{f}(0) = 2$.
- On peut, très correctement, écrire $\ddot{f}(0) = \frac{d}{dt}(\dot{f}(0))$, puisqu'il est convenu de dériver $\dot{f}(t)$ *d'abord*, de faire $t = 0$ *après*.

De même, en écrivant $\vec{\Gamma}(I \in S_2/S_1) = \frac{d}{dt}[\vec{V}(I \in S_2/S_1)]_{S_1, I \in S_2}$, il suffit de dériver comme si I était quelconque (lié à S_2, mais non au point de contact), donc d'employer la formule générale de $\vec{\Gamma}$; et seulement après, tenir compte des particularités de $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$.

4° - MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

On donne ici un bref aperçu des mouvements plan sur plan ; ils sont utilisés en particulier pour l'étude des engrenages à axes parallèles.

DEFINITIONS :

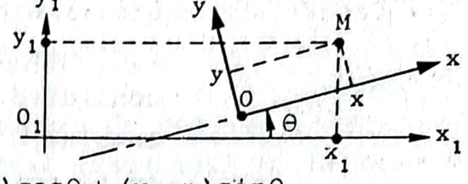
Soit P_1 un plan fixe ou absolu, soit P un plan (mobile ou relatif) glissant sur P_1 d'un mouvement non réduit à une translation rectiligne ni à une rotation (autour d'un axe fixe orthogonal et lié à P et P_1).

. A chaque instant le mouvement P/P_1 est tangent à une rotation autour d'un axe $(I,\vec{k})$ orthogonal à P et P_1, tel que I varie à la fois dans P et P_1.

. I est appelé *c.i.r.* (*centre instantané de rotation*) et on a $\vec{V}_e(I) = \vec{0}$.

. Le mouvement P/P_1 est appelé mouvement plan sur plan.

CALCULS :



• Si $P_1 = (O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ et $P = (O,\vec{x},\vec{y})$, on utilise (ξ,η) coordonnées absolues de O, et $\theta = \widehat{\vec{x}_1,\vec{x}}$ ainsi que $M = (x_1,y_1)_{P_1} = (x,y)_P$ on obtient :

$$M/P_1 \begin{cases} x_1 = \xi + x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = \eta + x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad M/P \begin{cases} x = (x_1-\xi)\cos\theta + (y_1-\eta)\sin\theta \\ y = -(x_1-\xi)\sin\theta + (y_1-\eta)\cos\theta \end{cases}$$

• $\vec{V}_e(M) = (\dot{x}_1,\dot{y}_1)_{P_1}$ avec x et y constants, d'où pour I (en annulant $\vec{V}_e$)

$$0 = \dot{\xi} - x\sin\theta\dot{\theta} - y\cos\theta\dot{\theta} \equiv \dot{\xi} - \dot{\theta}(y_1-\eta) \text{ et } 0 = \dot{\eta} + x\cos\theta\dot{\theta} - y\sin\theta\dot{\theta} \equiv \dot{\eta} + \dot{\theta}(x_1-\xi)$$

BASE : courbe décrite par I dans P_1 (trajectoire absolue de I) donc courbe C_1 fixe dans P_1

ROULANTE : courbe décrite par I dans P (trajectoire relative de I) donc courbe C fixe dans P

PROPRIETE : le mouvement P/P_1 est le *roulement sans glissement* de C sur C_1 car $\vec{V}_e(I) = \vec{V}(I \in P/P_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_g(C/C_1) = \vec{0}$.

Equations : pour C_1, on a $0 = \dot{\xi} - \dot{\theta}(y_1-\eta)$ et $0 = \dot{\eta} + \dot{\theta}(x_1-\xi)$ d'où I $\begin{cases} x_1 = \xi - \dfrac{\dot{\eta}}{\dot{\theta}} \\ y_1 = \eta + \dfrac{\dot{\xi}}{\dot{\theta}} \end{cases}$

pour C, on a de même I : $x = (\dot{\xi}\sin\theta - \dot{\eta}\cos\theta)/\dot{\theta}$; $y = (\dot{\xi}\cos\theta + \dot{\eta}\sin\theta)/\dot{\theta}$

On a donc des équations paramétriques de C_1 dans P_1 et de C dans P.

PROPRIETES GEOMETRIQUES DU C.I.R. :

• I ne dépend pas de θ(t), I ne dépend que des *configurations géométriques*.

• Si un point M lié à P décrit une trajectoire absolue connue, IM est normal à cette trajectoire.

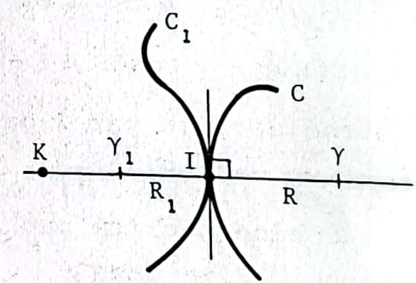
• Si une courbe liée à P passe par un point fixe A_1 de P_1, IA_1 est normal à cette courbe.

• Si une courbe liée à P reste tangente à une courbe fixe de P_1 (laquelle est l'enveloppe de cette courbe liée à P), soit A le point de contact : IA est normal à la courbe et à son enveloppe.

PROPRIETES AU SUJET DES ACCELERATIONS :

- *Centre des accélérations* : point J tel qu'à chaque instant $\vec{\Gamma}_e(J) = \vec{0}$.
  Le point J dépend de la fonction $\Theta(t)$.
- *Centre géométrique des accélérations* : point K tel que $\vec{\Gamma}_e(K) = \vec{0}$ avec $\dot{\Theta} = cte$.
  . Le point K ne dépend que des configurations géométriques.
  . K est sur la normale en I à la base C_1 et à la roulante C.
- *Cercle des inflexions* : cercle σ de diamètre IK.
  . σ est l'ensemble des points liés à P qui, à l'instant considéré, sont des points d'inflexion de leur trajectoire absolue.
  . En particulier si un point lié à P décrit une droite fixe de P_1 ce point est sur σ
  . J aussi est sur σ ; sa position dépend des valeurs de $\dot{\Theta}$ et $\ddot{\Theta}$ à l'instant considéré.
- *Cercle des rebroussements* : cercle σ' symétrique de σ par rapport à I.
  . σ' est l'ensemble des points liés à P qui, à l'instant considéré, vérifient la propriété suivante : l'enveloppe absolue d'une droite liée à P passant par ce point, possède en ce point un rebroussement.
  . En particulier si une droite liée à P passe par un point fixe de P_1, ce point est sur le cercle des rebroussements.

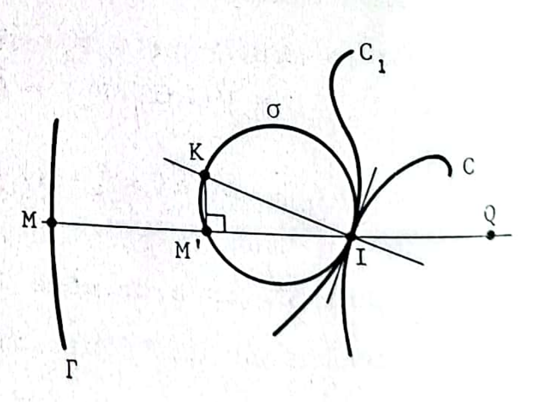
PROPRIETES AU SUJET DES COURBURES :



- La base C_1 et la roulante C ont en I des centres de courbure γ_1 et γ et des rayons de courbure R_1 et R.

On a $\frac{1}{\overline{IK}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$

(K centre géométrique des accélérations)



- Si un point M lié à P a une trajectoire absolue Γ, la normale en M à Γ est MI et le cercle des inflexions σ coupe MI en M' ; le centre de courbure Q de Γ en M, vérifie :

$$\overline{MQ}.\overline{MM'} = \overline{MI}^2$$

CHAPITRE 12

CINETIQUE DU SOLIDE

Comme pour le point, la cinétique du solide est un ensemble de définitions, utilisant maintenant des torseurs (au lieu de vecteurs), destinées à passer de la cinématique à la dynamique.

1° - CONVENTIONS, NOTATIONS, RAPPELS

• Un solide peut être de type volume, surface, ou ligne ; alors, on dira respectivement qu'il est de dimension 3, 2, ou 1.

• Un point pourra être considéré comme de dimension 0.

• Un solide S étant donné, on dit qu'il est composé de *parties élémentaires*, dont chacune est représentée par un *point* (matériel) M, de masse dite élémentaire et notée dm.

• En repérant M par ses coordonnées (dans un repère lié à S de préférence), on a en général dm exprimée en fonction des coordonnées de M et de leurs différentielles.

• La *masse totale* m de S s'exprime par $m = \int_S dm$

l'indice S signifie que les variables doivent varier de façon que M décrive tout le solide S, "une fois et une seule".

• *Convention* : le symbole $\int$ est une intégrale triple si dim S = 3, une intégrale double si dim S = 2, une intégrale simple si dim S = 1, et une "somme $\sum$" si S est formé de points matériels "disjoints", c'est-à-dire ayant des distances mutuelles (constantes) non nulles.

• Si S est formé de parties de dimensions différentes (qui seraient par exemple soudées les unes aux autres) on adapte la convention à chaque partie d'une manière évidente, puisque les intégrales et "les $\sum$" sont additives.

• *Densité d'un solide* S : fonction, de type ρ : $\left|\begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longrightarrow \rho(M) \end{array}\right.$

définie à partir de la masse élémentaire dm, et du volume dv, (ou bien de la surface $d\sigma$, ou bien de la longueur $d\ell$) de la partie élémentaire M correspondante, par :

$$\rho(M) = \lim_{dv \to 0} \left(\frac{dm}{dv}\right), \text{ ou } \lim_{d\sigma \to 0} \left(\frac{dm}{d\sigma}\right), \ldots$$

- *Solide homogène* : solide tel que $\rho(M) = constante$. Dans ce cas, si m est la masse totale, et v le volume total, (ou σ la surface, ℓ la longueur totale), on obtient $\rho(M)$ par $\rho(M) = \frac{m}{v}$ (ou $\frac{m}{\sigma}$ ou $\frac{m}{\ell}$).
- Non homogène se dit : hétérogène ; dans ce cas, $\rho(M) \neq$ constante.

2° - CENTRE D'INERTIE - MOMENTS ET PRODUITS D'INERTIE

NOTATIONS :

S désigne un solide, M une partie élémentaire de S et dm la masse élémentaire associée à M ($dm = \rho(M)dv$ ou $\rho(M)d\sigma$ ou $\rho(M)d\ell$ suivant la dimension de S).

- *Centre d'inertie de S* : point G tel que $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

Détermination pratique : on choisit une origine et un repère, liés à S de préférence, et on y projette la relation (équivalente à la définition) :

$$m\,\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\, dm, \text{ d'où } m\, x_G = \int_S x_M\, dm, \text{ etc...}$$

Associativité : si l'on a plusieurs solides distincts S_1, S_2, ... de masses m_1, m_2, ... et de centres d'inertie G_1, G_2, ... alors leur réunion $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ a une masse $m = m_1 + m_2 + \cdots$ et un centre d'inertie G tel que $m\,\overrightarrow{OG} = m_1\,\overrightarrow{OG_1} + m_2\,\overrightarrow{OG_2} + \cdots$ (comme pour les barycentres).

- *Moment d'inertie de S par rapport à une droite Δ* :
Scalaire (positif ou nul) noté $I_\Delta(S)$, défini par :

$$I_\Delta(S) = \int_S [d(M,\Delta)]^2\, dm$$ où $d(M,\Delta)$ est la distance de M à Δ.

De même pour les moments d'inertie par rapport à un *point* A ou un *plan* π, avec $[d(M,A)]^2$ ou $[d(M,\pi)]^2$.

- *Produits d'inertie de S dans un repère* $R = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:
Si on désigne par (x,y,z) les coordonnées de l'élément M de S (de masse dm) repérées dans R, on définit 3 produits d'inertie, désignés par D E F ou bien par P_{yz} P_{zx} et P_{xy} respectivement, par :

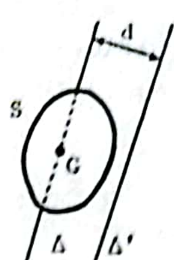
$$D \text{ ou } P_{yz} = \int_S yz\, dm \qquad E \text{ ou } P_{zx} = \int_S xz\, dm$$

$$F \text{ ou } P_{xy} = \int_S xy\, dm$$

Ce sont des scalaires, ils peuvent être négatifs, nuls ou positifs.

• *Théorème de Huyghens*

Si Δ passe par G, si Δ' est parallèle à Δ à distance d, (pour un solide S, de centre d'inertie G, de masse m), alors : $I_{\Delta'}(S) = I_{\Delta}(S) + md^2$



Preuve immédiate, en prenant un repère d'origine G dont un axe est porté par Δ.

Conséquence : $I_{\Delta}(S)$ est le moment d'inertie minimal, par rapport aux droites parallèles à Δ (car si $\Delta' = \Delta$, $d = 0$).

3° - OPERATEUR (OU TENSEUR, OU MATRICE) D'INERTIE DE S

• On désigne le solide par S, son centre d'inertie par G, sa masse par m, l'élément de S par M de masse dm, et on choisit une origine O, a priori quelconque, mais en pratique liée à S et souvent confondue avec G.

• *Opérateur d'inertie en O de S* : application $\mathbb{I}_O(S)$, abrégée ici en $\mathbb{I}_O$

définie par $\mathbb{I}_O$: $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \longrightarrow \mathbb{I}_O(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})\, dm \end{array}\right.$

• *Propriété* : $\mathbb{I}_O$ est *symétrique* (donc linéaire), et pourra donc être représentée par une matrice si l'on choisit une base de $\mathbb{R}^3$.

Preuve : on veut $\vec{v}\cdot\mathbb{I}_O(\vec{u}) = \vec{u}\cdot\mathbb{I}_O(\vec{v})$, $\forall\vec{u}$, $\forall\vec{v}$. Cela revient à : $\vec{v}\cdot[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})] = \vec{u}\cdot[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM})]$, qui s'écrit $(\vec{v}, \overrightarrow{OM}, \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}, \vec{v} \wedge \overrightarrow{OM})$. On permute ces produits mixtes, on a : $(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}, \vec{v}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}, \vec{u}, \overrightarrow{OM})$, c'est-à-dire $(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})\cdot(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}) = (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM})\cdot(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})$, évident.

• *Matrice d'inertie en O de S* : matrice représentant $\mathbb{I}_O$ dans une base choisie. On appelle aussi une telle matrice : *opérateur* d'inertie, ou même *tenseur* d'inertie, si l'on se rapporte au calcul tensoriel (hors de propos dans ce livre).

• *Explicitation de $\mathbb{I}_O$ dans une base choisie* :

Le point O était choisi. Si l'on choisit de plus une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on obtient le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = R$. Pour alléger, on convient de désigner par R le repère aussi bien que sa base, et par $\mathbb{I}_{O,R}$ la matrice cherchée, on a :

$$\mathbb{I}_{O,R} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} P_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & P_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & -P_{zz} \end{pmatrix}$$

avec $A = P_{xx}$ défini par $A = I_{(O,\vec{x})}(S)$, de même $B = I_{(O,\vec{y})}$, $C = I_{(O,\vec{z})}$ et $D = P_{yz}$ défini au paragraphe précédent, de même $E = P_{xz}$ et $F = P_{xy}$.

Preuve très succincte : on explicite $\mathbb{I}_O(\vec{x})$, $\mathbb{I}_O(\vec{y})$, etc... d'après les définitions, de manière à obtenir les termes de la 1ère colonne, puis de la 2ème, etc... On constate alors : $A = I_{(O,\vec{x})}$, etc...

Remarques : en général, on choisit O, puis finalement R, liés au solide. Alors, $\mathbb{I}_{O,R}$ ne dépend que de la configuration géométrique du solide et de sa densité $\rho(M)$, et "caractérise" le solide, de ces points de vue. De plus, on s'efforce d'avoir une matrice "simple". Or, les vecteurs propres sont orthogonaux 2 à 2 (matrice symétrique), donc ils permettent de définir (avec O) un repère R où la matrice est diagonale.

- Un repère $R = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ ainsi défini est dit : *principal d'inertie* dans un tel repère : $\mathbb{I}_{O,R} = \text{diag}(A,B,C)$.
- Si de plus $O = G$, on obtient le repère *central d'inertie*.

THEOREMES UTILES

1. Dans R, si l'on connaît la matrice $\mathbb{I}_{O,R}$ et si l'on veut le moment d'inertie par rapport à Δ *passant par* O dirigée par $\vec{e}_\Delta$ (unitaire), on a :

$$I_{O\Delta} = \vec{e}_\Delta \cdot \mathbb{I}_{O,R}(\vec{e}_\Delta)$$

2. *Théorème de Koenigs* : $\mathbb{I}_O(S) = \mathbb{I}_G(S) + \mathbb{I}_O(G, \text{masse totale})$ ce qui signifie : *avec une même base* B, la matrice d'inertie en O est égale à celle en G "augmentée" de la matrice d'inertie du point G (centre d'inertie) supposé doué de la masse totale, pour un solide donné.

4° - TORSEUR CINETIQUE

En conservant les mêmes notations, et pour le mouvement d'un solide S par rapport à un repère R_0, on définit le

Torseur cinétique de S par rapport à R_0, noté $[\mathcal{K}(S/R_0)]$ ou $[\mathcal{K}]$,

par :

$$[\mathcal{K}] = \left[\int_S \vec{V}(M/R_0)\,dm,\ \vec{\sigma} \right]$$

- La résultante générale est appelée *résultante cinétique*, et on a :

$$\int_S \vec{V}(M/R_0)\,dm = m\vec{V}(G/R_0)$$

- Le moment $\vec{\sigma}$ est appelé *moment cinétique*, et on a :

$$\text{point } P \longrightarrow \vec{\sigma}_P = \int_S \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}(M/R_0)\,dm$$

- En pratique, $\vec{\sigma}_P$ n'est utile qu'en certains points P, et on a :
  - *En A lié à S* $\quad \vec{\sigma}_A = \mathbb{I}_A(\vec{\Omega}(S/R_0)) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0)$

- *En* G (centre d'inertie) $\vec{\sigma}_G = \text{II}_G(\vec{\Omega}(S/R_0))$

- En d'autres points, utiliser $\vec{\sigma}_P = \vec{\sigma}_Q + m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$; $Q = G, A, \ldots$

IMPORTANT :

Les calculs pratiques doivent être cohérents, c'est-à-dire effectués en même base pour $\text{II}_{A \text{ ou } G}$ et $\vec{\Omega}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\vec{V}(A)$,...

5° - TORSEUR DYNAMIQUE

Dans les mêmes conditions que pour le torseur cinétique, on définit le torseur dynamique (de S par rapport à R_0) noté $[\mathcal{A}(S/R_0)]$ ou $[\mathcal{A}]$, par :

$$[\mathcal{A}] = \left[\int_S \vec{\Gamma}(M/R_0)\,dm,\ \vec{\delta}\right]$$

- La résultante générale est appelée *résultante dynamique*, et on a :

$$\int_S \vec{\Gamma}(M/R_0)\,dm = m\vec{\Gamma}(G/R_0)$$

- Le moment $\vec{\delta}$ est appelé *moment dynamique*, et on a :

$$\text{point P} \longrightarrow \vec{\delta}_P = \int_S \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R_0)\,dm$$

- En pratique, $\vec{\delta}_P$ n'est utile qu'en certains points P; on a :

  - *En A quelconque* $\vec{\delta}_A = \left(\dfrac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right)_{R_0} + m\vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$

  - *En* G (centre d'inertie) $\vec{\delta}_G = \left(\dfrac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\right)_{R_0}$

  - En d'autres points, on peut utiliser : $\vec{\delta}_P = \vec{\delta}_Q + m\vec{\Gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$

6° - ENERGIE CINETIQUE

Dans les mêmes conditions (solide S, mouvement par rapport à R_0), *l'énergie cinétique*, notée $T(S/R_0)$ ou T, est le scalaire :

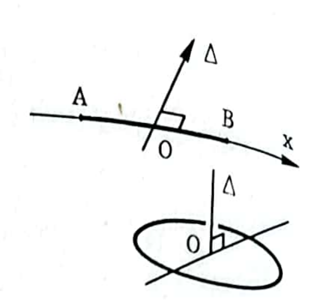
$$T = \frac{1}{2}\int_S \|\vec{V}(M/R_0)\|^2\,dm$$

- Si on simplifie l'écriture de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ en $\vec{\Omega}$, $\vec{V}(A/R_0)$ en $\vec{V}_A$, ..., on a :

  - *Pour A lié à S,* $2T = m\|\vec{V}_A\|^2 + \vec{\Omega}\cdot\text{II}_A(\vec{\Omega}) + 2m(\vec{V}_A, \vec{\Omega}, \overrightarrow{AG})$

  - *Pour* G : $2T = m\|\vec{V}_G\|^2 + \vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}_G$

7° - RESULTATS CLASSIQUES POUR SOLIDES HOMOGENES



- Tige ou barre AB, longueur 2ℓ : $I_{0x} = 0$, $I_{0\Delta} = \dfrac{m\ell^2}{3}$
- Cercle ou cerceau, rayon R, axe 0Δ :
$$I_{0\Delta} = mR^2, \quad I_{diamètre} = \frac{mR^2}{2}$$
- Disque, rayon R, axe 0Δ : $I_{0\Delta} = \dfrac{mR^2}{2}$, $I_{diamètre} = \dfrac{mR^2}{4}$
- Sphère, rayon R : $I_{diamètre} = \dfrac{2mR^2}{3}$
- Boule, rayon R : $I_{diamètre} = \dfrac{2mR^2}{5}$
- Pour les calculs d'intégrales, voir Chapitres 17 et 18.

CHAPITRE 13

DYNAMIQUE - EFFORTS, PUISSANCE, TRAVAIL THEOREMES GENERAUX

1°. SYSTEMES - EFFORTS

Les causes des mouvements, apparemment très diverses, sont toutes appelées *efforts*, on les représente par des *torseurs*, et non plus par de simples vecteurs comme pour le point.

. *Solide gêné* : solide dont la trajectoire d'au moins un point est soumise à des conditions géométriques.

Exemples : solide devant rester en contact avec un solide donné,
solide devant avoir un de ses points fixe,
solide devant tourner autour d'un axe, en coulissant ou non.
Etc...

. *Solide libre* : solide se trouvant dans tout autre cas que gêné.

. *Système* : ensemble de solides ou de points pouvant être en mouvement les uns par rapport aux autres, dont la notion intuitive essentielle est que *sa masse reste constante*.

Exemples : une charrette est un système.
une fusée avec réacteurs en marche n'est pas un système, (la masse varie avec la consommation de carburant).
un obus avant éclatement, puis l'ensemble des éclats, constituent un même système si on néglige la perte de masse d'explosif.

. Toutes les notions cinétiques s'étendent aux systèmes, par additivité des $\int$ (triples, doubles, simples ou $\sum$ suivant dimension des parties).

. *Classification des efforts*, en "*extérieurs*" ou "*intérieurs*" à un système :

1. *Efforts extérieurs à un système* S : efforts exercés sur S par l'ensemble de tous les systèmes autres que S.
   . On peut distinguer 4 catégories d'efforts extérieurs :
   . *Forces concentrées* : forces s'exerçant en des points de S.
   Si $\vec{F}_i$ s'exerce en $M_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots)$, le *torseur d'efforts* est $[\sum_i \vec{F}_i, \vec{\mathcal{M}}]$ tel que $\vec{\mathcal{M}}_P = \sum_i (\overrightarrow{PM}_i \wedge \vec{F}_i)$.
   . *Couples concentrés* : certains efforts ne peuvent être schématisés par des forces, mais doivent être considérés comme des couples de type $[\vec{O}, \vec{C}_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Leur torseur associé est $[O, \sum_i \vec{C}_i]$.
   En pratique, on ne donne souvent que les $\vec{C}_i$.

· *Densité de forces* : en M, de masse élémentaire dm, il peut y avoir une force (élémentaire) de type $\vec{f}\,dm$, où $\vec{f}$ est fonction de M, éventuellement de t ou d'autres paramètres.

$\vec{f}$ est *densité de forces*, le torseur associé est :

$$\left[\int_S \vec{f}\,dm, \vec{\mathcal{M}}\right] \text{ tel que } \vec{\mathcal{M}}_p = \int_S \overrightarrow{PM} \wedge \vec{f}\,dm.$$

· *Densité de couples* : certains efforts doivent être considérés comme des couples (élémentaires), de type $\vec{c}\,dm$, où $\vec{c}$ est fonction de M, éventuellement de t ou d'autres paramètres. $\vec{c}$ est *densité de couples*, le torseur associé est

$$\left[\vec{0}, \int_S \vec{c}\,dm\right].$$

2. *Efforts intérieurs à un système* S : efforts exercés sur une partie de S par l'ensemble des autres parties de S, et elles seules.
   · Au niveau de ce livre, on précise seulement que, si l'on décompose S en 2 parties disjointes S_1 et S_2 ($S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$), alors S_1 est *extérieur* à S_2 et il exerce sur S_2 des efforts représentés par le torseur $[\mathcal{C}(S_1/S_2)]$. De même, S_2 (extérieur à S_1) exerce sur S_1 des efforts, d'où le torseur $[\mathcal{C}(S_2/S_1)]$.
   · Ces efforts sont des efforts *intérieurs au système* S, et on démontre : $[\mathcal{C}(S_1/S_2)] + [\mathcal{C}(S_2/S_1)] = [0]$ (torseur nul).
   · De même pour toute autre partition du système (ou éventuellement du solide).
   · De tels efforts apparaissent par exemple dans des systèmes où des solides sont gênés. On les appelle alors *efforts de liaison*.

2° - PUISSANCE - TRAVAIL

On considère *un solide* S, en mouvement par rapport au repère R_0, sur lequel agissent des efforts représentés par $[\mathcal{E}] = [\vec{F}, \vec{\mathcal{M}}]$.

PUISSANCE DEVELOPPEE PAR $[\mathcal{E}]$:

Quantité scalaire, notée $\mathcal{P}_{R_0}$ ou $\mathcal{P}_{R_0}(\mathcal{E})$, définie par $\underline{\mathcal{P}_{R_0} = [\mathcal{E}] \times [\mathcal{V}]}$ où $[\mathcal{V}]$ est le torseur cinématique de S dans le mouvement S/R_0.

Calcul pratique : il s'agit de produit (ou comoment) de torseurs, on rappelle qu'on choisit "au mieux" un même point A (lié à S) pour le calcul des moments, et en notant $[\mathcal{V}] = [\vec{\Omega}(S/R_0), \vec{V}]$, on applique :

$$[\mathcal{E}] \times [\mathcal{V}] = [\vec{F}, \vec{\mathcal{M}}_A] \times [\vec{\Omega}(S/R_0), \vec{V}(A/R_0)] = \underline{\vec{F}\cdot\vec{V}_A + \vec{\Omega}\cdot\vec{\mathcal{M}}_A}$$

(en notation abrégée).

TRAVAIL DEPUIS $t = t_1$ JUSQU'A $t = t_2$:

Comme dans le cas du point on définit : $\underline{\mathcal{C}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{R_0}\,dt.}$

REMARQUES :

Avec des notations déjà employées, on a :

. pour des forces concentrées $\vec{F}_i$ appliquées aux points M_i : $\mathcal{P}_{R_0} = \sum_i (\vec{F}_i . \vec{V}(M_i/R_0))$

. pour des couples concentrés $\vec{C}_i$ sur un *même solide* S : $\mathcal{P}_{R_0} = \vec{\Omega}(S/R_0) . (\sum_i \vec{C}_i)$

. pour une densité de forces sur un *solide ou un système* S : $\mathcal{P}_{R_0} = \int_S \vec{f}(M) . \vec{V}(M/R_0) dm$

. pour une densité de couples sur un *même solide* S : $\mathcal{P}_{R_0} = \vec{\Omega}(S/R_0) . \int_S \vec{c}(M) dm$

IMPORTANT :

Pour un *torseur nul*, la *puissance n'est pas nécessairement nulle*, mais elle ne dépend pas du repère par rapport auquel a lieu le mouvement.

Preuve : on part de $\mathcal{P}_{R_0} - \mathcal{P}_R = \int_S \vec{f} . [\vec{V}_{R_0}(M) - \vec{V}_R(M)] dm$,

d'où par introduction de $\vec{V}_e(M) \equiv \vec{V}(M \in R/R_0)$, $\mathcal{P}_{R_0} - \mathcal{P}_R = \int_S \vec{f} . \vec{V}_e(M) dm$.

or, $\vec{V}_e$ est antisymétrique, puisque, si A *lié* à R :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

il vient $\mathcal{P}_{R_0} - \mathcal{P}_R = V(A \in R/R_0) . \int_S \vec{f}\, dm + \vec{\Omega}(R/R_0) . \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}\, dm.$

L'hypothèse "torseur nul" signifie : $\int_S \vec{f}\, dm = \vec{0}$ et $\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}\, dm = \vec{0}$,

d'où $\mathcal{P}_{R_0} - \mathcal{P}_R = 0$, cqfd. Résultat valable pour les systèmes ou les solides.

CONSEQUENCES :

. pour un *système* S, on a vu que le torseur des efforts *intérieurs* est nul, donc sa puissance ne dépend pas du repère du mouvement.

. pour un *solide* S, de même la puissance des efforts *intérieurs* ne dépend pas du repère du mouvement, *et elle est nulle* (prendre R lié à S).

3° - REPERES, REPERES GALILEENS, AXIOMES FONDAMENTAUX

. *Repères dynamiquement équivalents* : les repères R_1 et R_2 sont dynamiquement équivalents, lorsque le mouvement (R_1/R_2) ou (R_2/R_1) est rectiligne uniforme (on a alors $\vec{\Gamma}(P/R_1) = \vec{\Gamma}(P/R_2)$ quel que soit P).

. *Axiomes fondamentaux* :

1. Il existe un repère R_0 tel que, pour *tout système* S en mouvement dans R_0, l'on ait *à chaque instant* : $[\mathcal{A}(S/R_0)] = [\mathcal{E}]$, c'est-à-dire : *torseur dynamique* = *torseur des efforts extérieurs*.

2. R_0 est alors dit *galiléen*, et il existe une classe de repères R dynamiquement équivalents à R_0, où l'on a : $[\mathcal{A}(S/R)] = [\mathcal{E}]$.

. *Conséquence pratique* : pour étudier le mouvement d'un solide (ou d'un

système) S par rapport à un repère galiléen R_0, on détermine le torseur dynamique $[\mathcal{A}(S/R_0)]$, le torseur des efforts extérieurs à S, soit $[\mathcal{E}]$, et on applique la formule "$\mathcal{A} = \mathcal{E}$" ; on obtient en général 6 équations scalaires pour chaque solide S (ou chaque partie du système).

. *Cas des repères non galiléens* : si on a 2 repères R_0 et R_1, avec R_0 galiléen par exemple, on sait :

$$\forall M,\ \vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{\Gamma}(M/R_1) + \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1).$$

On définit alors :

. $[\mathcal{F}_e]$, torseur associé à la densité (fictive) $\vec{\Gamma}_e(M) \equiv \vec{\Gamma}(M \in R_1/R_0)$,

d'où $[\mathcal{F}_e] = [\int_S \vec{\Gamma}_e(M)dm, \vec{\mathcal{M}}^e]$ tel que $\vec{\mathcal{M}}_P^e = \int_S \vec{PM} \wedge \vec{\Gamma}_e(M)dm.$

. $[\mathcal{F}_c]$, torseur associé à la densité (fictive) $\vec{\Gamma}_c(M) \equiv 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$

d'où $[\mathcal{F}_c] = [\int_S \vec{\Gamma}_c(M)dm, \vec{\mathcal{M}}^c]$ tel que $\vec{\mathcal{M}}_P^c = \int_S \vec{PM} \wedge \vec{\Gamma}_c(M)dm.$

. On dit que $-[\mathcal{F}_e]$ est le torseur des *efforts (fictifs d'inertie) d'entraînement*, et $-[\mathcal{F}_c]$ le torseur des *efforts (fictifs d'inertie) de Coriolis* (complémentaires).

. Par l'axiome 1, on a $[\mathcal{A}(S/R_1)] + [\mathcal{F}_e] + [\mathcal{F}_c] = [\mathcal{E}]$, d'où *l'axiome fondamental en repère quelconque* R_1 (valable $\forall t$, $\forall S$) :

$$\underline{[\mathcal{A}(S/R_1)] = [\mathcal{E}] - [\mathcal{F}_e] - [\mathcal{F}_c]}$$

4° - THEOREMES GENERAUX

Les 3 (ou 5) théorèmes suivants sont valables en repère *galiléen* R_0 et d'adaptent aux cas non galiléens en remplaçant $[\mathcal{E}]$ par $[\mathcal{E}] - [\mathcal{F}_e] - [\mathcal{F}_c]$.

. *Théorème 1, de la résultante dynamique.*

Pour un *système* S (ou un solide S), de centre d'inertie G, de masse totale m soumis à des efforts *extérieurs* de résultante générale $\vec{F}_{ext}$ on a ($\forall t$)

$$\boxed{m\vec{\Gamma}(G/R_0) = \vec{F}_{ext}}$$

. *Théorème 2, du moment dynamique.*

Dans les mêmes conditions qu'au théorème 1, si $\vec{\mathcal{M}}(ext)$ désigne le moment des efforts *extérieurs*, on a ($\forall t$, $\forall P$)

$$\boxed{\vec{\delta}_P(S/R_0) = \vec{\mathcal{M}}_P(ext)}$$

Preuves : ces 2 théorèmes sont la traduction de "$\mathcal{A} = \mathcal{E}$".

- *Corollaire* du théorème 2 : *théorème du moment cinétique* :

si $P = G$ *ou si* P *est immobile dans* R_0, $\left(\frac{d\vec{\sigma}_P}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\mathcal{M}}_P(\text{ext})$

Preuve : on sait : $\vec{\delta}_P(S/R_0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_P}{dt}\right)_{R_0} + m\,\vec{V}(P/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$,

d'où l'évidence du corollaire.

. *Théorème 3, de l'énergie cinétique*

Pour un *solide* S (mais non pour un système), la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique $T(S/R_0)$ et la puissance $\mathcal{P}_{R_0}(\text{ext})$ des efforts extérieurs vérifient ($\forall t$)

$$\boxed{\frac{dT(S/R_0)}{dt} = \mathcal{P}_{R_0}(\text{ext})}$$

- *Corollaire* du théorème 3 : *intégrale première de l'énergie* :

s'il existe une fonction W *telle que* $\mathcal{P}_{R_0}(\text{ext}) = \frac{dW}{dt}$ alors on a l'intégrale 1ère de l'énergie : $T(S/R_0) = W + h$ (h constante).

- Théorème de l'énergie pour un *système* S, fini, de solides disjoints S_i : dans ce cas les efforts *intérieurs* à S vérifient 2 à 2 des égalités de torseurs de type $[\mathcal{T}(S_i/S_j)] + [\mathcal{T}(S_j/S_i)] = [0]$. Or, on a vu au 2°) que la puissance du torseur nul n'est en général nulle que pour les efforts intérieurs à un solide, pas pour ceux intérieurs à un système.

. Donc, en notant $\mathcal{P}_{R_0}(\text{int})$ la puissance totale des efforts (S_i/S_j) et des efforts (S_j/S_i) pour tous i et j ($i \neq j$), alors on a :

$$\frac{dT(S/R_0)}{dt} = \mathcal{P}_{R_0}(\text{ext}) + \mathcal{P}_{R_0}(\text{int})$$

(pour un *système* fini de solides disjoints).

. $\mathcal{P}_{R_0}(\text{int})$ peut être remplacé par $\mathcal{P}_R(\text{int})$, R quelconque.

5° - INTEGRALES PREMIERES

. Les théorèmes généraux fournissent des équations scalaires qui sont nécessairement différentielles d'ordre 2 (sauf $T = W + h$). Il est important de les intégrer au moins une fois, d'où les notions suivantes :

. *Définition* : on appelle *intégrale première* (d'un mouvement) toute expression (scalaire) contenant au moins un paramètre ou une *dérivée première* d'un paramètre (du mouvement), et qui reste *constante durant le mouvement*.

. *Exemple* : l'intégrale première de l'énergie, si on l'écrit $T - W = h$.

AUTRES CAS USUELS D'INTEGRALES PREMIERES :

1. Si $\vec{u}$ (unitaire) est constant dans R_0, et si $\vec{u}.\vec{\mathcal{M}}_G(ext) = 0$, alors on a l'intégrale première du mouvement S/R_0 : $\underline{\vec{u}.\vec{\sigma}_G = K}$ (constante).
2. Si $\vec{u}$ (unitaire) est constant dans R_0, si O est fixe dans R_0, et si $\vec{u}.\vec{\mathcal{M}}_0(ext) = 0$, alors on a de même : $\vec{u}.\vec{\sigma}_0 = K$ (constante).

➤ *Preuves* : puisqu'en G, on a $(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_0} = \vec{\mathcal{M}}_G(ext)$, $\vec{u}.\vec{\mathcal{M}}_G(ext) = 0$ s'écrit $\vec{u}.(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_0} = 0$, soit $\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{\sigma}_G) = 0$ puisque, sur les 2 termes de la dérivée, le terme $(\frac{d\vec{u}}{dt})_{R_0}.\vec{\sigma}_G$ est nul ($\vec{u}$ constant dans R_0). On intègre, et on a le résultat. Il en est de même avec O fixe dans R_0.

3. Si $\vec{u}$ est constant dans un repère R, si $\vec{u}.\vec{\mathcal{M}}_G(ext) = 0$ dans le mouvement S/R_0, et si $(\vec{u},\vec{\Omega}(R/R_0), \vec{\sigma}_G(S/R_0)) = 0$, alors on a l'intégrale première du mouvement S/R_0 : $\underline{\vec{u}.\vec{\sigma}_G = K}$ (constante).
4. De même, si $\vec{u} \in R$, si $\vec{u}.\vec{\mathcal{M}}_0(ext) = 0$ avec O fixe dans R_0, et si $(\vec{u},\vec{\Omega}(R/R_0),\vec{\sigma}_0(S/R_0)) = 0$, on a : $\underline{\vec{u}.\vec{\sigma}_0 = K}$ (constante).

➤ *Preuves* : puisqu'en G, on a $(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_{R_0} = \vec{\mathcal{M}}_G(ext)$, on peut écrire $\vec{u}.[(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G] = 0$ par hypothèse, et cela se réduit à $\vec{u}.(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt})_R = 0$ par autre hypothèse, donc à $\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{\sigma}_G) = 0$ puisque $\vec{u} \in R$, d'où $\vec{u}.\vec{\sigma}_G = K$. Il en est de même avec $O \in R_0$.

REMARQUE :

Il peut exister d'autres intégrales premières que les précédentes, mais "imprévisibles" au niveau de ce livre.

CHAPITRE 14

LIAISONS ET FROTTEMENTS POUR LES SOLIDES

1° - GENERALITES

• On considère le cas du solide gêné, soit par contact ponctuel avec un autre solide, soit par d'autres procédés "simples" décrits au 2°.

• Des *liaisons* (représentées par des torseurs) s'introduisent alors et constituent des inconnues supplémentaires.

• *Paramètres de position* : ce sont 6 paramètres, grâce auxquels la position d'un solide S est déterminée, dans un repère supposé fixe.

Par *exemple* : 3 coordonnées cartésiennes d'un point M lié à S, et 3 angles d'Euler déterminant les 3 axes d'un repère lié à S.

Pour un *système*, il peut y avoir plus de 6 paramètres de position : on ajoute les nombres de paramètres de chaque partie du système.

• *Liaison holonôme* : liaison dont la traduction ne nécessite que des paramètres de position, mais non leurs dérivées (par rapport à t).

• *Liaison non holonôme* : liaison nécessitant des relations où figurent des dérivées de paramètres de position (dérivées par rapport à t).

• *Remarques* :

. Une liaison holonôme, par dérivation, peut être considérée comme non holonôme. Mais on ne peut pas toujours intégrer une relation de liaison non holonôme.

. Une liaison (holonôme ou non) peut être *indépendante du temps* (lorsque t ne figure pas explicitement dans des relations), ou bien *dépendante du temps* (lorsque t figure explicitement dans des relations).

• *Liaison bilatérale* : liaison traduite par *égalités* scalaires (ramenées à =0).

• *Liaison unilatérale* : liaison traduite par *inégalités* scalaires (ramenées à $\geqslant 0$).

• *Degrés de liberté d'un solide* S : nombre de paramètres suffisant à déterminer la position de S (ou son mouvement) lorsqu'on tient compte des liaisons. Sans liaisons, un solide a *6 d.d.l.* (degrés de liberté).

Avec liaisons permettant d'exprimer p paramètres en fonction des autres, il reste (6 - p) *d.d.l.*

. Pour un *système*, s'il y a n paramètres de position sans les liaisons, de même il reste (n - p) d.d.l. Evident : $n - p > 0$; et si $n - p = 0$, le système est "bloqué", rien ne peut bouger.

Exemple : Une bille S est un solide qu'on peut repérer par 3 coordonnées pour le centre, et 3 angles d'Euler pour un repère lié à S (6 paramètres).

. Si cette bille reste au contact avec l'intérieur d'un bol, il y a une liaison unilatérale holonôme (car il y a 1 relation entre les coordonnées du centre : l'équation d'une surface parallèle à celle du bol). Il y a 5 d.d.l. pendant le contact. Si le contact cesse, la relation du contact devient une inégalité, et on a 6 d.d.l.

. Si cette bille roule sans glisser pendant le contact, cela introduit en général 2 relations ($\vec{V}_g = \vec{0}$ dans le plan tangent), a priori non holonômes ; il reste 3 d.d.l.

2° - LIAISONS PARFAITES

• Une liaison (pour un solide gêné) introduit un *torseur de liaison*, inconnu a priori et qu'on s'efforce de déterminer. Le cas le plus simple est celui de la liaison parfaite, encore appelée non dissipative.

• *Liaison parfaite* : liaison dont la *puissance* est *nulle* dans tout *mouvement respectant* cette liaison.

Remarque : cette définition, valable pour toute espèce de liaison (bilatérale ou non, holonôme ou non), cesse de s'appliquer à une liaison unilatérale dès que cette liaison cesse (car il n'y a plus cette liaison, on a un nouveau problème).

• *Méthode d'étude d'une liaison parfaite* : on suppose un solide S en mouvement (gêné) par rapport à un repère R_0.

. Choisir un point A de S et une base $\mathcal{B}$, de sorte que les calculs ultérieurs soient les plus simples possibles.

. Nommer les éléments de réduction en A dans la base $\mathcal{B}$, des torseurs cinématique $[\mathcal{V}]$ et de liaison $[\mathcal{L}]$, à savoir :

avec $\vec{\Omega} = (p,q,r)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{V}(A \in S/R_0) = (u,v,w)_{\mathcal{B}}$: $[\mathcal{V}] = (p,q,r,u,v,w)_{A,\mathcal{B}}$

et avec : $\vec{R} = (X,Y,Z)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{\mathcal{M}}_A(\mathcal{L}) = (L,M,N)_{\mathcal{B}}$: $[\mathcal{L}] = (X,Y,Z,L,M,N)_{A,\mathcal{B}}$

. Puissance à étudier : $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr$

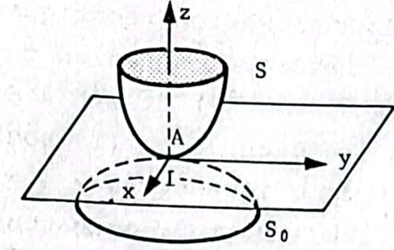
. Respect de la liaison : si la base $\mathcal{B}$ est bien choisie, le respect de la liaison se traduit par des relations telles que : $u = 0$, ou $p = 0$, etc... dans $[\mathcal{V}]$.

. Introduire ces "respects" dans $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = 0$; on en tire un certain nombre de renseignements sur des éléments de réduction de $[\mathcal{L}]$.

. Voir des exemples page suivante.

3° - EXEMPLES USUELS

1. *Contact ponctuel* S/S_0 (*bilatéral ou unilatéral*)
Le "bon" repère de calcul est $(I,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'origine A = I (point de contact) avec $\vec{x},\vec{y}$ dans le plan tangent commun et $(I,\vec{z})$ normal.



a) *Cas du glissement* : $\vec{V}_g = \vec{V}(I \in S/S_0) \neq \vec{0}$, de type $u\vec{x} + v\vec{y}$ pendant le contact, donc w = 0. Il reste : $uX + vY + Lp + Mq + Nr = 0$, $\forall u,v,p,q,r$ donc nécessairement $X = Y = L = M = N = 0$, d'où les éléments en I de $[\mathcal{L}]$: $[\mathcal{L}]_I = [Z\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0}]$.

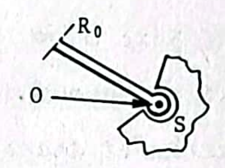
b) *Cas du roulement sans glissement* : $\vec{V}_g = \vec{0}$, donc $u = v = w = 0$ pendant un tel mouvement, donc il reste $Lp + Mq + Nr = 0$, $\forall p,q,r$, d'où : $L = M = N = 0$. Alors, $[\mathcal{L}]_I = [X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0}]$.

c) *Dans tous les cas*, on a de plus la "loi physique" suivante :

> La résultante générale de l'action de S_0 sur S est dans le même demi-espace que S par rapport au plan tangent commun en I.

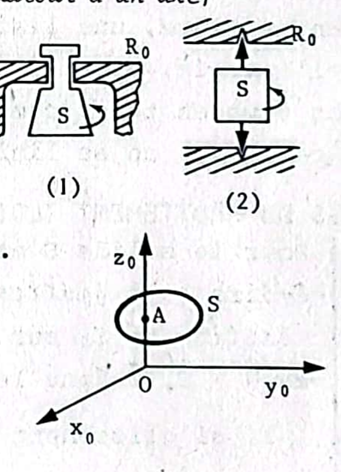
On en déduit, dans les 2 cas a) et b) : $Z > 0$ (tant que la liaison a lieu).

2. *Liaison sphérique* (*pour fixer un point O d'un solide S*)
Réalisation technique, par *rotule* (voir schéma), ou par *suspension de Cardan* (voir gyroscope, Chapitre 15). Le "bon" repère est d'origine O (le point fixe), de base du repère R_0 (du mouvement S/R_0 étudié), soit $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

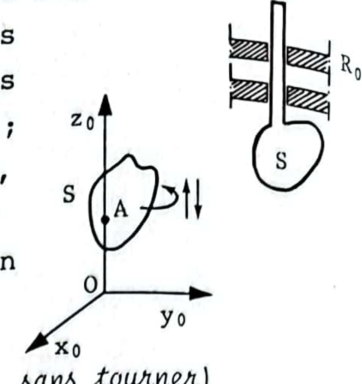


La liaison est nécessairement bilatérale, son respect est $\vec{V}(O/R_0) = \vec{0}$, d'où : $u = v = w = 0$. Il vient : $Lp + Mq + Nr = 0$, $\forall p,q,r$, d'où : $L = M = N = 0$, d'où : $[\mathcal{L}]_0 = [X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0 + Z\vec{z}_0, \vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0}]$

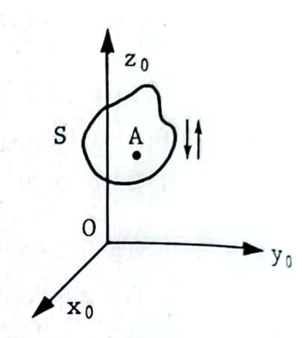
3. *Liaison cylindrique, ou rotoïde* (*solide S tournant autour d'un axe*)
Réalisation technique, par palier non coulissant (1), ou axe à pivots (2), etc... Le "bon" repère est celui par rapport auquel S est en mouvement, et on peut toujours supposer que l'axe de rotation est $(O,\vec{z}_0)$, lié à S et à R_0, et le point A est quelconque sur $(O,\vec{z}_0)$ mais fixé.
Respect de la liaison : $\vec{V}(A \in S/R_0) = \vec{0}$ d'où $u = v = w = 0$, et $\vec{\Omega}(S/R_0) = r\vec{z}_0$ d'où $p = q = 0$.
Il reste : $Nr = 0$, $\forall r$, d'où $N = 0$. On obtient :
$[\mathcal{L}]_A = [X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0 + Z\vec{z}_0, \vec{\mathcal{M}}_A = L\vec{x}_0 + M\vec{y}_0]$ en $A \in$ axe.



4. *Liaison verrou (solide S glissant et tournant autour d'un axe)*
Réalisation technique : paliers coulissants. Mêmes repère et notation qu'au cas précédent, mais A, pris sur $(O,\vec{z}_0)$ et lié à S, peut se mouvoir sur $(O,\vec{z}_0)$; respect de la liaison : $\vec{V}(A\in S/R_0) = w\vec{z}_0$, $\vec{\Omega}(S/R_0) = r\vec{z}_0$, donc il reste $u = v = p = q = 0$, et on doit avoir $Zw + Nr = 0$, pour tous w et r, donc $Z = N = 0$; on obtient : $[\mathcal{L}]_A = [X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0, \vec{\mathcal{M}}_A = L\vec{x}_0 + M\vec{y}_0]$.



5. *Liaison glissière (solide S coulissant le long d'un axe, sans tourner)*
Réalisation technique : tige carrée, coulissant dans un tube carré pour empêcher les rotations, ou bien solide "embroché" sur deux axes parallèles, etc ... Mêmes repère et notation qu'au cas précédent, mais A quelconque lié à S. Respect : $u=v=0$, $p=q=r=0$, il reste $wZ = 0$, $\forall w$, d'où $Z = 0$, et on obtient :
$[\mathcal{L}]_A = [X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0, \vec{\mathcal{M}}_A = L\vec{x}_0 + M\vec{y}_0 + N\vec{z}_0]$ en $A\in S$.



En résumé, pour les liaisons *parfaites* usuelles, on peut retenir :

1. *Contact en* I $\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0}$, et : si glissement $\vec{R} \perp$ plan tangent,
si non glissement $\vec{R}$ quelconque.
avec $\vec{R}$ "vers S".
2. *Point fixe* O $\Rightarrow \vec{R}$ quelconque, $\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0}$.
3. *Rotation* autour d'un axe Δ : en $A\in\Delta$, $\vec{R}$ quelconque, $\vec{\mathcal{M}}_A \perp \Delta$.
4. *Rotation et translation*, axe Δ : en $A\in S$, A sur Δ : $\vec{R} \perp \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}_A \perp \Delta$.
5. *Translation*, direction Δ : en $A\in S$, $\vec{R} \perp \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}_A$ quelconque.

4° - LIAISONS DISSIPATIVES - FROTTEMENTS

COMMENTAIRE :

En pratique, une liaison parfaite est irréalisable et il se perd toujours de l'énergie, c'est-à-dire que la puissance correspondante est négative. Si l'on veut en tenir compte, on introduit la notion de frottement. Au niveau de ce livre, on se limite au cas de 2 solides en contact.

LOIS DU FROTTEMENT (LOIS DE COULOMB) : même forme qu'au Chapitre 8, soit :

Pour le solide S en contact avec S_0 par une liaison *dissipative*, c'est-à-dire *avec frottement* (de coefficient f donné), la liaison introduit une *réaction* de S_0 sur S, *appliquée au point de contact* I, qu'on décompose en $\vec{N} + \vec{T}$, $\vec{T}$ dans le plan tangent commun en I, $\vec{N}$ normale à ce plan "vers S".

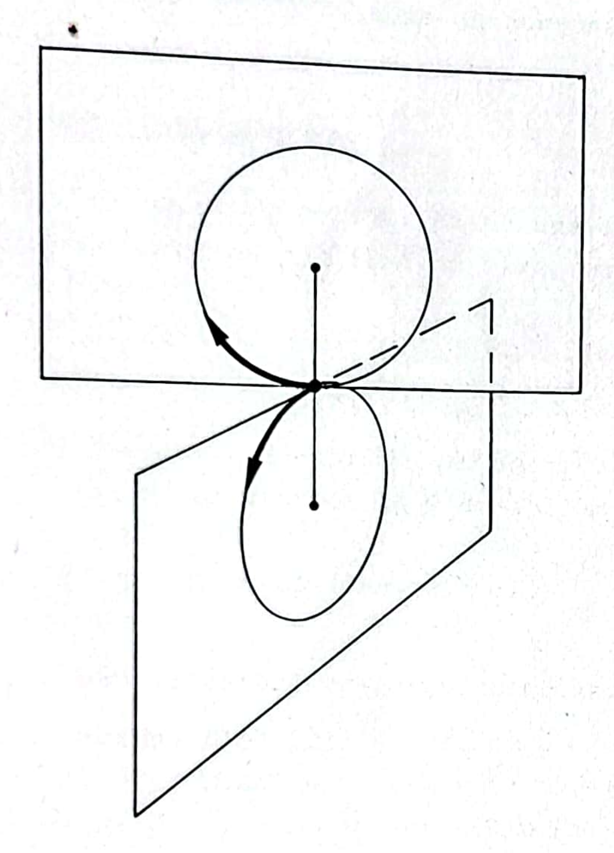
1. si glissement $(\vec{V}_g \neq \vec{0})$ $\vec{T} = -f\,\|\vec{N}\|\,\dfrac{\vec{V}_g}{\|\vec{V}_g\|}$
2. si non glissement $(\vec{V}_g = \vec{0})$ $\|\vec{T}\| < f\,\|\vec{N}\|$.

REMARQUES :

• Le 1. signifie que $\vec{T}$ est de sens opposé à $\vec{V}_g$ et de norme égale à $f\|\vec{N}\|$.

• Les liaisons "point fixe", rotation autour d'un axe, etc... sont évidemment dissipatives en réalité ; dans ce cas, elles sont hors du niveau de ce livre.

• Dans le cas de contact ponctuel "courbe/solide" ou "courbe/courbe", $\vec{T}$ est en général sur une tangente commune s'il en existe une ; sinon le problème est hors du niveau de ce livre. Par exemple, deux cercles restant en contact et situés dans deux plans différents comme sur le schéma n'ont pas de tangente commune.



CHAPITRE 15

QUELQUES MOUVEMENTS CLASSIQUES

On rencontre des mouvements "autour d'un point" ou "autour d'une droite" très souvent en pratique, par exemple les mouvements de corps célestes, de pièces mécaniques (roues, pignons, volants) ou encore de gyroscopes, etc... La mécanique rationnelle rappelée ici, donne une première approximation de ces mouvements qui est très suffisante même en supposant les liaisons parfaites.

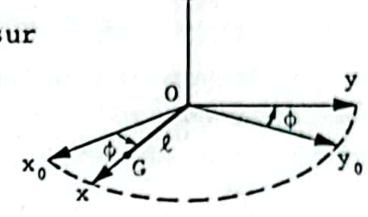
1° . SOLIDE A DROITE FIXE : CAS GENERAL

• Repères : Origine O = point du solide, situé sur la droite fixe.
$R_0 = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ galiléen et qualifié de fixe, ou bien terrestre et fixe.
$R = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}=\vec{z}_0)$ lié au solide ; $(O,\vec{z}) \equiv (O,\vec{z}_0)$ est la "droite fixe".

• Paramètres : l'angle $\phi = \widehat{\vec{x}_0,\vec{x}}$ suffit. D'où $\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\phi}\vec{z}$

• Données : G centre d'inertie du solide, par exemple sur Ox, défini par $\vec{OG} = \ell\vec{x}$, et la matrice *en* O du solide,

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \text{ exprimée dans } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.$$



[$\mathscr{E}$] torseurs des efforts extérieurs, en particulier $\vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext}) = L\vec{x}+M\vec{y}+N\vec{z}$.

• Liaison parfaite rotoïde, d'où $[\mathscr{L}]_0 = [X\vec{x}+Y\vec{y}+Z\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_0 = \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}]$, donc équation du mouvement, évidemment par $\vec{\delta}_0\cdot\vec{z} = N$ (car [$\mathscr{L}$] n'y figure pas).

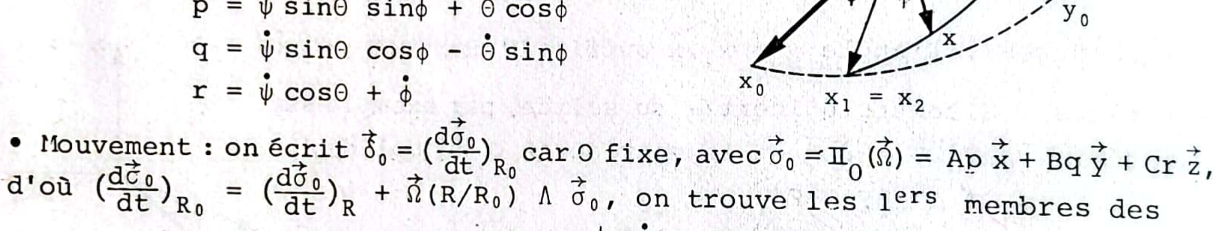
Or, la 3ème composante de $\vec{\sigma}_0 = \Pi_0(\vec{\Omega})$ est visiblement $C\dot{\phi}\vec{z}$ avec $\vec{z} \equiv \vec{z}_0$, donc $\vec{\delta}_0\cdot\vec{z} = C\ddot{\phi}$, d'où *l'équation du mouvement* $\underline{C\ddot{\phi} = N}$.

• Liaison déterminée par les autres équations données par les théorèmes généraux : $m\vec{\Gamma}(G/R_0) = \vec{F}(\text{ext}) + X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$; $\vec{\delta}_0 = \vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext}) + \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ en projections sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

• *Remarque* : en explicitant $\vec{\delta}_0 = \left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}\right)_{R_0} \equiv \left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}\right)_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{\sigma}_0$, on trouve sur $\vec{x}$: $-E\ddot{\phi}+D\dot{\phi}^2 = L+\lambda$, sur $\vec{y}$: $-D\ddot{\phi}-E\dot{\phi}^2 = M+\mu$, d'où la norme de la projection dans $(\vec{x},\vec{y})$ de $\vec{\delta}_0$: $\sqrt{D^2+E^2}\sqrt{\ddot{\phi}^2+\dot{\phi}^4}$. On voit que même si la rotation est uniforme ($\ddot{\phi} = 0$) il existe un moment dynamique orthogonal à l'axe de rotation, de norme $\sqrt{D^2+E^2}\,\dot{\phi}^2$, à moins d'avoir D = E = 0. C'est ce qu'on s'efforce d'avoir en pratique sinon l'axe risque de vibrer ou même de casser; en particulier en prenant Oz principal d'inertie du solide.

2° - SOLIDE A POINT FIXE : CAS GENERAL

- Repères : origine O = point du solide, qui reste fixe.
  $R_0 = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ galiléen ou terrestre, qualifié de fixe.
  $R = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au solide, supposé principal d'inertie.
- Paramètres : les 3 angles d'Euler définissant R par rapport à R_0.
- Données : matrice d'inertie en O, dans R, du solide : II_0 = diag (A,B,C).
  $[\mathscr{E}] = [\vec{F},\vec{\mathcal{M}}]$ torseur des efforts extérieurs, avec $\vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext}) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$.
- Liaison parfaite sphérique, d'où $[\mathscr{L}]_0 = [X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0}]$, donc on a les 3 équations du mouvement par $\vec{\delta}_0 = \vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext})$ (car $[\mathscr{L}]$ n'y figure pas).
- Rappel sur les angles d'Euler.
  $R_0 \longrightarrow R_1$ par précession ψ d'axe $(O,\vec{z}_0)$
  $R_1 \longrightarrow R_2$ (de Résal) par nutation Θ d'axe $(O,\vec{x}_1)$.
  $R_2 \longrightarrow R$ par rotation propre ϕ d'axe $(O,\vec{z}_2)$
  $\vec{\Omega}(R/R_0) = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$, avec :
  $p = \dot{\psi}\sin\Theta\sin\phi + \dot{\Theta}\cos\phi$
  $q = \dot{\psi}\sin\Theta\cos\phi - \dot{\Theta}\sin\phi$
  $r = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\phi}$



- Mouvement : on écrit $\vec{\delta}_0 = \left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}\right)_{R_0}$ car O fixe, avec $\vec{\sigma}_0 = \mathrm{II}_0(\vec{\Omega}) = Ap\,\vec{x} + Bq\,\vec{y} + Cr\,\vec{z}$, d'où $\left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}\right)_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{\sigma}_0$, on trouve les 1ers membres des

équations d'Euler
$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = L \\ B\dot{q} + (A-C)rp = M \\ C\dot{r} + (B-A)pq = N \end{cases}$$

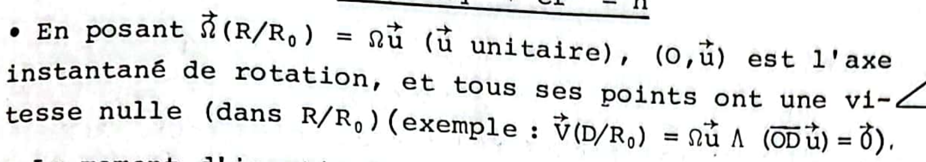
- Théoriquement, ce système détermine les 3 "pseudo-paramètres" p, q, r puisque L, M, N sont données, ensuite on en déduirait ψ, Θ, ϕ.
- Pour déterminer X, Y, Z (liaison), il suffit d'expliciter sur $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ la relation $m\vec{\Gamma}(G/R_0) = \vec{F} + X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$

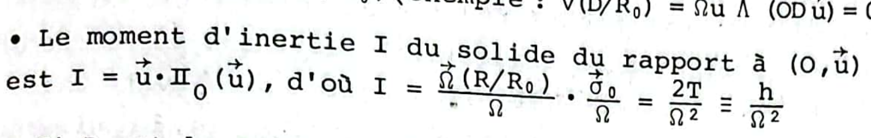
3° - SOLIDE A POINT FIXE : CAS D'EULER - POINSOT

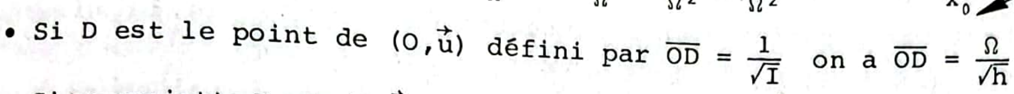
- Dans le cas général précédent, on ajoute l'hypothèse :
  $\underline{\vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext}) = \vec{0}}$
- Les équations d'Euler peuvent donc être remplacées par 3 intégrales premières, car $\vec{\delta}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_0$ constant dans R_0 (3 équations scalaires).
- On peut remplacer une des équations par 2T = h (constante) car $\mathscr{P}_{R_0} = 0$.
- *Etude géométrique du mouvement*
- On prend $(O,\vec{z}_0)$ selon $\vec{\sigma}_0$ puisque celui-ci est constant dans R_0.

• On avait supposé R (lié au solide) principal d'inertie en O, et posé $\vec{\Omega}(R/R_0) = p\,\vec{x} + q\,\vec{y} + r\,\vec{z}$, on a :

$$2T \equiv \underline{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h}$$


• En posant $\vec{\Omega}(R/R_0) = \Omega\vec{u}$ ($\vec{u}$ unitaire), $(O,\vec{u})$ est l'axe instantané de rotation, et tous ses points ont une vitesse nulle (dans R/R_0) (exemple : $\vec{V}(D/R_0) = \Omega\vec{u} \wedge (\overline{OD}\,\vec{u}) = \vec{0}$).


• Le moment d'inertie I du solide du rapport à $(O,\vec{u})$ est $I = \vec{u}\cdot\mathrm{II}_O(\vec{u})$, d'où $I = \dfrac{\vec{\Omega}(R/R_0)}{\Omega} \cdot \dfrac{\vec{\sigma}_0}{\Omega} = \dfrac{2T}{\Omega^2} \equiv \dfrac{h}{\Omega^2}$


• Si D est le point de $(O,\vec{u})$ défini par $\overline{OD} = \dfrac{1}{\sqrt{I}}$ on a $\overline{OD} = \dfrac{\Omega}{\sqrt{h}}$

• Si on projette D sur $(O,\vec{z}_0)$ en A, on a $\overline{OA} = \dfrac{\Omega}{\sqrt{h}}\,\vec{u}\cdot\dfrac{\vec{\sigma}_0}{\|\vec{\sigma}_0\|} \equiv \dfrac{2T}{\sqrt{2T}\,\|\vec{\sigma}_0\|} = \dfrac{\sqrt{h}}{\|\vec{\sigma}_0\|}$, constant.

1ère conclusion : le plan π, orthogonal à $\vec{\sigma}_0$ et passant par A, est fixe dans R_0 et le point D est dans ce plan, où il vérifie $\vec{V}(D/\pi) = \vec{0}$.

• L'*ellipsoïde d'inertie en* O de S, défini par $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ (dans R), a sa normale au point (x,y,z) dirigée par (Ax,By,Cz). Or, $\overrightarrow{OD}$ est dirigé par $\vec{\Omega}(R/R_0)$, donc D a ses coordonnées dans R proportionnelles à (p,q,r) ; en fait, D est sur l'ellipsoïde d'inertie, dont la normale en D est dirigée par (Ap,Bq,Cr), c'est-à-dire par $\vec{\sigma}_0$, ou encore par $\vec{z}_0$. Ainsi, le plan tangent en D à l'ellipsoïde est le plan π; et $\vec{V}(D/\pi) = \vec{0}$ prouve le roulement sans glissement de cet ellipsoïde sur π.

2ème conclusion : le mouvement d'EULER-POINSOT est le même que le roulement sans glissement de l'ellipsoïde d'inertie en O sur le plan π défini précédemment.

• La trace de D sur l'ellipsoïde est la *polhodie*, celle sur le plan est l'*herpolhodie*. Les 2 courbes roulent sans glisser l'une sur l'autre, et les 2 cônes de sommet O ayant ces courbes pour directrices roulent sans glisser l'un sur l'autre.

• Pour plus de détails, voir les manuels. On signale que si A = B, les cônes sont de révolution, ψ et φ sont uniformes et Θ reste constant.

4° - SOLIDE A POINT FIXE : CAS DE LAGRANGE - POISSON

• Dans le cas général du 2°, on ajoute les hypothèses

$$\underline{A = B} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{M}_0(\text{ext}) \text{ porté par } \vec{x}_2}$$

• Ces hypothèses sont réalisées lorsque le solide S est homogène et de révolution autour de $(O,\vec{z})$, et que seul le poids intervient avec $\vec{z}_0$ vertical.

• La 3° équation d'Euler se réduit à $\dot{r} = 0$, donc r = constante (car N = 0), d'où *l'intégrale première* $\underline{(1)\ \ \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\phi} = r}$ (*constante*)

• On a $\mathcal{M}_0(\text{ext})\cdot\vec{z}_0 = 0$, d'où $\vec{\delta}_0\cdot\vec{z}_0 = 0$, d'où $\vec{\sigma}_0\cdot\vec{z}_0 = K$ (constante), soit *l'intégrale première* (2) $A\dot{\psi}\sin^2\theta + Cr\cos\theta = K$ (*constante*)

en détaillant convenablement $\begin{pmatrix} Ap \\ Aq \\ Cr \end{pmatrix}_R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_R$

• Si l'on suppose les efforts extérieurs réduits au poids seul, on peut toujours supposer le centre d'inertie G sur $(O,\vec{z})$, $\vec{OG} = \ell\,\vec{z}$, et R_0 terrestre avec $\vec{z}_0$ vertical et les forces de Coriolis négligeables (voir Chapitre 8). La liaison parfaite en O donne une puissance nulle, la puissance du poids est $-mg\,\vec{z}_0\cdot\vec{V}(G/R_0) = -mg\,\vec{z}_0\cdot\left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)_{R_0} \equiv \frac{d}{dt}(-mg\,\vec{z}_0\cdot\vec{OG}) \equiv \frac{d}{dt}(-mg\,\ell\cos\theta)$ donc on a l'intégrale première de l'énergie. On a $2T = \vec{\Omega}(R/R_0)\cdot\vec{\sigma}_0 = A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + Cte$, donc une 3ème équation du mouvement est :

l'intégrale première (3) $A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) = -2mg\,\ell\cos\theta + h$ (h constante)

• *Etude algébrique du mouvement*

• On pose $\cos\theta = u$; $\sin^2\theta = 1 - u^2$ donne $\dot{\theta}\sin\theta = -\dot{u}$ et $\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1-u^2}$, d'où :

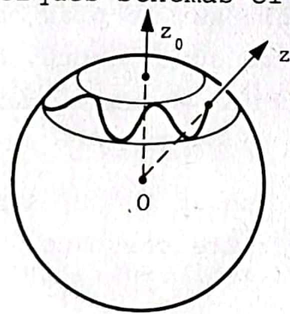
(2) devient $\dot{\psi} = \frac{K - Cr\,u}{A(1-u^2)}$, puis (1) devient $\dot{\phi} = r - u\,\frac{K - Cr\,u}{A(1-u^2)}$,

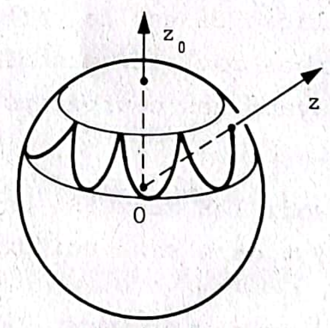
enfin (3) devient $A\dot{u}^2 = (1-u^2)(h - 2mg\,\ell\,u) - \frac{(K - Cr\,u)^2}{A}$

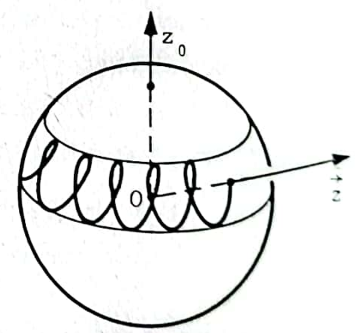
de forme $A\dot{u}^2 = P(u)$, *polynôme du 3° degré* en u.

• Avec $A\dot{u}^2 = P(u)$, le mouvement n'est possible que si $P(u) \geqslant 0$ et de plus $-1 \leqslant u \leqslant +1$ car $u = \cos\theta$.

• On peut donc discuter graphiquement les différents cas. Pour plus de détails, voir les manuels. On signale que la trace de l'axe $(O,\vec{z})$ lié à S, sur une sphère de centre O, peut avoir diverses allures dont on a donné quelques schémas ci-après.







5° - GYROSCOPE, SUSPENSION DE CARDAN

• La liaison sphérique par rotule, en pratique, ne permet que des variations limitées de certains angles d'Euler.

• Par contre, la suspension de Cardan "matérialise" les angles d'Euler et ne limite pas leurs variations.

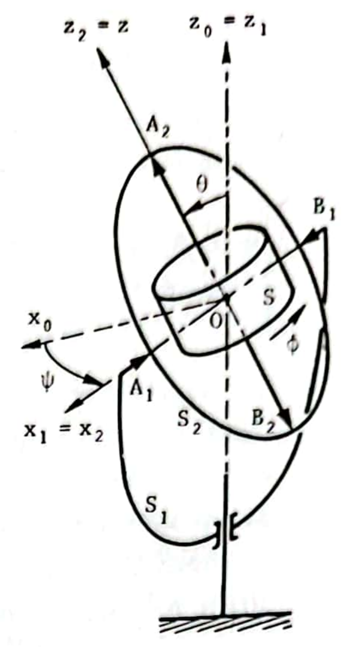
• L'ensemble schématisé ci-contre est un *système de 3 solides* (S_1, S_2, S) appelé *gyroscope*, où la fixité de O est due à la *suspension de Cardan*.

• $\underline{R_0} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère supposé fixe.

• $\underline{S_1}$ est un cadre (en général léger) qui peut tourner autour de $(O, \vec{z}_0)$. On lui lie $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$ la précession $\psi = \widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1}$ est matérialisée.

• $\underline{S_2}$ est un cadre (léger) qui peut tourner autour de A_1B_1 porté par $(O, \vec{x}_1)$. On lui lie le repère de Résal $R_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ où $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$, et $\theta = \widehat{\vec{z}_0, \vec{z}}$; (nutation) est ainsi matérialisée.

• $\underline{S}$ est le solide (quelconque a priori) qui peut tourner autour de A_2B_2 porté par $(O, \vec{z}_2)$; on lui lie $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{z}_2)$. La rotation propre $\phi = \widehat{\vec{x}_2, \vec{x}}$ est ainsi matérialisée.



• En pratique, le *gyroscope* est le système (S_1, S_2, S) avec le *solide* S *de révolution autour de* $(O, \vec{z})$ et de *centre d'inertie* O.

• On suppose les liaisons parfaites, on les élimine des équations du mouvement comme suit :

1. *Système total* (S_1, S_2, S) :
   - liaisons en A_1, B_1, A_2, B_2 intérieures, donc de moment nul
   - rotation (S_1/Oz_0) ⇒ liaison de moment en O orthogonal à $\vec{z}_0$
   - fixité de O ⇒ liaison de moment en O nul
   - donc il reste : $\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_0(S_1+S_2+S))_{R_0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext. à } S_1+S_2+S) \cdot \vec{z}_0$

2. *Système partiel* (S_2, S) :
   - liaisons en A_2, B_2 intérieures, donc de moment nul
   - rotation (S_2/Ox_1) ⇒ liaison de moment en O orthogonal a $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$
   - fixité de O ⇒ liaison de moment en O nul

   donc il reste : $\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_0(S_2+S))_{R_0} \cdot \vec{x}_2 = \vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext. à } S_2+S) \cdot \vec{x}_2$

3. *Solide* S *seul* :
   - rotation (S/Oz) ⇒ liaison de moment en O orthogonal à $\vec{z}$
   - fixité de O ⇒ liaison de moment en O nul

   donc il reste : $\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_0(S))_{R_0} \cdot \vec{z} = \vec{\mathcal{M}}_0(\text{ext. à } S) \cdot \vec{z}$

• *Explicitation des équations pour le gyroscope* : S_1 et S_2 sont supposés négligeables ; S est supposé de révolution autour de $(O, \vec{z})$, O est son centre d'inertie et A,A,C ses moments d'inertie par rapport aux axes de R, donc de R_2.

On a $\vec{\sigma}_0(S/R_0) = Ap_2\,\vec{x}_2 + Aq_2\,\vec{y}_2 + Cr_2\,\vec{z}_2$, et comme S_1 et S_2 disparaissent des premiers membres (étant négligeables), il suffit de calculer $\left(\frac{d\vec{\sigma}_0(S)}{dt}\right)_{R_0}$ par $\left(\frac{d\vec{\sigma}_0(S)}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_0(S)$, où $\vec{\Omega}(R_2/R_0) = p_2\,\vec{x}_2 + q_2\,\vec{y}_2 + (r_2 - \dot{\phi})\,\vec{z}_2$, puis de projeter sur $\vec{z}_0$, $\vec{x}_2$, $\vec{z}$; on obtient :

1. $[A\dot{q}_2 + (A-C)p_2\, r_2 - Ap_2\, \dot{\phi}]\sin\Theta + C\dot{r}_2 \cos\Theta = \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_1+S_2+S)\cdot\vec{z}_0$
2. $A\dot{p}_2 + (C-A)q_2\, r_2 + Aq_2\, \dot{\phi} = \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_2+S)\cdot\vec{x}_2$
3. $C\dot{r}_2 = \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S)\cdot\vec{z}$

• *Equations approchées du mouvement du gyroscope*

On raisonne en 3 étapes, de manière à simplifier les 3 équations précédentes.

a) On suppose que seul le poids intervient, et seulement pour S, donc son moment en O est nul, l'équation 3 donne $\dot{r}_2 = 0$, d'où :

$$(3) \quad \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\phi} = r_2 \ \textit{constante}$$

b) On suppose qu'on fait tourner S rapidement autour de Oz, donc $\dot{\phi}$ est "grand", pratiquement égal à r_2, d'où $\dot{\psi}\cos\Theta$ (et aussi $\dot{\psi}\sin\Theta$) négligeable devant des termes de l'ordre de r_2 ou de $\dot{\phi}$.

Dans l'équation 1, $C\dot{r}_2\cos\Theta = 0$ et $Ap_2\, r_2 - Ap_2\,\dot{\phi}$ négligeable, d'où

$$\sin\Theta[A(\ddot{\psi}\sin\Theta + \dot{\psi}\cos\Theta\dot{\Theta}) - Cr_2\,\dot{\Theta}] \simeq \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_1+S_2+S)\cdot\vec{z}_0$$

Puis $A\dot{\psi}\cos\Theta\dot{\Theta}$ négligeable devant $Cr_2\,\dot{\Theta}$, donc il reste

$$\sin\Theta(A\ddot{\psi}\sin\Theta - Cr_2\,\dot{\Theta}) \simeq \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_1+S_2+S)\cdot\vec{z}_0$$

De même, l'équation 2 devient $A\ddot{\Theta} + Cr_2\,\dot{\psi}\sin\Theta \simeq \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_2+S)\cdot\vec{x}_2$

c) Enfin, r_2 est "grand" donc $\vec{\Omega}(S/R_0)$ est "proche" de $r_2\,\vec{z}_2$, donc $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ reste "presque parallèle" à $\vec{z}_2$, donc $\left(\frac{d\vec{\sigma}_0(S/R_0)}{dt}\right)_{R_2}$ est "presque nul" devant $\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_0(S/R_0)$, c'est-à-dire : $A\ddot{\psi}\sin\Theta$ négligeable devant $Cr_2\,\dot{\Theta}$, $A\ddot{\Theta}$ négligeable devant $Cr_2\,\dot{\psi}\sin\Theta$. D'où les équations approchées, où r_2 *est constant* :

$$(1) \quad -Cr_2\sin\Theta\dot{\Theta} \simeq \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_1+S_2+S)\cdot\vec{z}_0$$

$$(2) \quad +Cr_2\sin\Theta\dot{\psi} \simeq \vec{\mathcal{M}}_0\,(\text{ext. à } S_2+S)\cdot\vec{x}_2$$

• *Quelques conséquences*

· Si on applique un moment $N\vec{z}_0$ (tendant à faire tourner le cadre S_1), on a par (1) $-Cr_2\sin\Theta\dot{\Theta} = N$ donc Θ varie. Or, on pouvait croire que ψ allait varier, puisque l'on tendait à tourner autour de Oz_0.

· De même, en appliquant $L\vec{x}_2$, on s'attend à voir Θ varier, mais $+Cr_2\sin\Theta\,\dot{\psi} = L$ montre que c'est surtout ψ qui varie, d'après (2).

· D'autres conséquences, qu'on trouvera dans des manuels plus spécialisés, font du gyroscope un système dont les applications pratiques sont très nombreuses (aviation, cosmonautisme, satellites artificiels, navigation maritime,...).

CHAPITRE 16

NOTIONS SUR LES EQUATIONS DE LAGRANGE

AVERTISSEMENT :

Le présent chapitre n'est qu'une introduction très élémentaire à la *Mécanique Analytique*, à seule fin d'inviter le lecteur à s'intéresser à des ouvrages plus spécialisés que ce livre. On donne ici quelques notions de base, mais il était hors de propos d'en faire plus.

1° - GENERALITES - THEOREMES DES TRAVAUX VIRTUELS

• Soit R un repère galiléen, (M,m) un point matériel soumis à la force totale $\vec{F}$ et d'accélération $\vec{\Gamma}$ par rapport à R. On sait : $m\vec{\Gamma} - \vec{F} = \vec{0}$ ($\forall t$). Il est équivalent d'écrire : $(m\vec{\Gamma} - \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$, $\forall\vec{u}$ et $\forall t$.

• On peut appliquer ces considérations aux particules d'un solide S, et plus généralement d'un système S. Pour simplifier les écritures et la compréhension, on suppose un système fini de particules, $S = \sum_i M_i$ où M_i (de masse m_i) est soumis à $\vec{F}_i$ et a pour accélération $\vec{\Gamma}_i$; on obtient :

$$\sum_i (m_i \vec{\Gamma}_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{u}_i = 0 \qquad \forall\{\vec{u}_i\},\ \forall t$$

où chacun des vecteurs $\vec{u}_i$ est arbitraire, et où la relation est valable pour tout ensemble arbitraire $\{\vec{u}_i\}$ de tels vecteurs.

• *Interprétations* :

. Si l'on interprète $\vec{u}_i$ comme une vitesse, $(m_i \vec{\Gamma}_i - \vec{F}_i)\cdot\vec{u}_i$ représente une puissance (arbitraire comme $\vec{u}_i$) : ceci n'est pas utile du point de vue étudié ici.

. Il est plus "fructueux" d'imaginer $\vec{u}_i$ comme un *déplacement*, donc le produit scalaire comme un *travail*. Ces quantités étant arbitraires, on leur attribue le qualificatif de *virtuel* (s'opposant à vrai, réel, observé).

REMARQUES IMPORTANTES :

1. Le *déplacement virtuel* $\vec{u}_i$ est géométrique, fictif, inventé à l'instant t fixé, et il est rectiligne et fini.

2. Un *déplacement réel* entre les instants t et t + δt, n'est pas, en général, un cas particulier de déplacement virtuel : ce dernier est à t fixé, et non pas entre t et t + δt.

• *Théorème des travaux virtuels* :

> Dans un système de solides (et de particules isolées éventuellement), à chaque instant la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées est nulle, pour tout ensemble de travaux virtuels respectant la rigidité des solides.

Preuve succincte : on sait $(m\vec{\Gamma}-\vec{F})\cdot\vec{u} = 0,\ \forall\vec{u},\ \forall t$; on effectue la sommation du premier membre pour toutes les particules (isolées ou composant les solides), par $\iiint$ ou $\iint$ ou $\int$ ou $\sum$ suivant dimensions.

2° - PRELIMINAIRES AUX EQUATIONS DE LAGRANGE

• On considère un système S (solides, particules isolées) à m d.d.l. et soumis à des liaisons. On introduira des *déplacements virtuels particuliers* dans lesquels on décide à l'avance de *respecter ou non* certaines liaisons.

• Si p est le nombre de liaisons non respectées, alors la configuration de S est décrite par m + p *paramètres*. Soit m + p = n, on désigne les n paramètres par $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

• On considère *une particule* M de masse m, soumise à la forme totale $\vec{F}$ (forces données, liaisons, forces fictives d'inertie $-m\vec{\Gamma}_e$ et $-m\vec{\Gamma}_c$ s'il y a lieu, etc...) et ayant l'accélération $\vec{\Gamma}$, d'où $(m\vec{\Gamma}-\vec{F})\cdot\vec{u} = 0,\ \forall t,\ \forall\vec{u}$, d'après le 1°.

• Dans le cas le plus général, une au moins des p liaisons choisies dépend explicitement de t, et M est défini par $\overrightarrow{OM}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$.

• *Déplacement virtuel particulier* : $\vec{u} = \overrightarrow{\delta M}$, *différentielle à t fixé* de $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire $\boxed{\overrightarrow{\delta M} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\,\delta q_i\right)}$, à ne pas confondre avec la "vraie" différentielle $\overrightarrow{dM} = \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\,dq_i\right)$, différentielle totale qui n'est pas en général un déplacement virtuel.

• On a maintenant $(m\vec{\Gamma}-\vec{F})\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\,\delta q_i\right) = 0$, autrement dit : $\sum_{i=1}^{n}\left[(m\vec{\Gamma}-\vec{F})\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\,\delta q_i\right] = 0$ pour tous δq_i et pour t fixé, d'où les n équations

$$m\vec{\Gamma}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i},\quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

• *Explicitation* de $m\vec{\Gamma}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}$ à partir de l'énergie cinétique de M, $T = \frac{1}{2}m\|\vec{V}\|^2$.

1ère étape : on sait $\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overrightarrow{M}}{q_i}\dot{q}_i \qquad (2)$

or $m\vec{\Gamma}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i} \equiv m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i} \equiv m\frac{d}{dt}\left[\vec{V}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\right] - m\vec{V}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\right)$, donc on explicite séparément chacun des deux derniers termes. Pour cela, il est *fondamental* de remarquer que $\vec{V}$ est fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$ et aussi de $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, d'où les calcules suivants.

2ème étape : dans (2), on voit : $\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}$. Donc $m\frac{d}{dt}\left[\vec{V}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial q_i}\right] = m\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i}\right)$

par ailleurs : $T = \frac{1}{2} m \vec{V} \cdot \vec{V}$ donne $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}$. Donc on écrit finalement $m \frac{d}{dt}\left[\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right]$ sous la forme : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$.

3ème étape : si on part de $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right)$, cela s'écrit $\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \, \partial q_j} \dot{q}_j\right)$

si on part de $\frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i}$ d'après (2), on a $\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \dot{q}_j\right]$ d'où en développant : $\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \, \partial q_j} \dot{q}_j\right)$; on voit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right) \equiv \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i}$, d'où :
$-m \vec{V} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right)$ s'écrit visiblement $-\frac{\partial T}{\partial q_i}$.

CONCLUSION :

$$m \vec{\Gamma} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \quad \text{s'écrit} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (3)$$

3° - EQUATIONS DE LAGRANGE

• Les calculs précédents s'appliquent à toutes les particules d'un solide, puis d'un système S. On peut sommer les n équations définies par (1), compte tenu de (3), par $\sum$, $\int$, $\iint$ ou $\iiint$ suivant les dimensions, pour tout le système S. On obtient les

EQUATIONS DE LAGRANGE :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

où T est l'énergie cinétique de S et où $Q_i = \int_S \vec{F}(M) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$

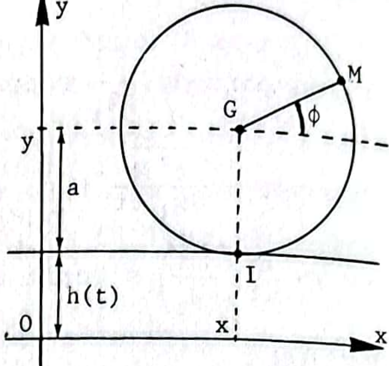
n étant le nombre m + p $\begin{cases} m \text{ d.d.l.} \\ p \text{ liaisons qu'on ne respectera pas.} \end{cases}$

MISE EN OEUVRE PRATIQUE

1. Exprimer l'énergie cinétique T en fonction des $q_i, \dot{q}_i$ et t, évidemment sans utiliser les relations de liaisons non respectées.
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ puis leurs dérivées totales $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial T}{\partial q_i}$. Eviter les confusions ...
3. Calculer les Q_i. Pour cela, à t fixé, exprimer les déplacements virtuels "utiles", c'est-à-dire ceux des points où sont appliquées des forces. On en tire le travail virtuel $\sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i$.
4. Exprimer les n équations de Lagrange.
5. Introduire enfin les liaisons qu'on n'avait pas respecté.

4° - EXEMPLE TRAITE DE 2 MANIERES

Données : Un disque homogène pesant, de masse m et de rayon a, assujetti à rester dans le plan vertical $(O,\vec{x},\vec{y})$ ($\vec{y}$ vertical ascendant), et assujetti à rester au contact d'une horizontale variable définie par $y = h(t)$.



Paramètres : coordonnées x,y du centre G.

angle $\phi = \widehat{\vec{Gx},\vec{GM}}$ (M lié au disque).

Forces : poids $-mg\,\vec{y}$ appliqué en G.

liaison $y = h(t) + a \Rightarrow \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y}$ en I.

1ère MANIERE :

On choisit *zéro liaison non respectée*, autrement dit, ici on respecte la liaison $y = h(t) + a$, d'où $\dot{y} = \dot{h}(t)$, $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{h}^2(t)) + \frac{ma^2}{4}\dot{\phi}^2$

- il n'y a que 2 paramètres à déterminer, x et ϕ (q_1 et q_2).
- on a : $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}) = m\ddot{x}$, et $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; de même $\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{ma^2}{2}\dot{\phi}$,

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}) = \frac{ma^2}{2}\ddot{\phi}$, $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$.

- le travail virtuel est $-mg\,\vec{y}\cdot\vec{\delta G} + \vec{R}\cdot\vec{\delta I}$ avec I supposé lié au disque, or $\vec{OG} = x\,\vec{x} + h(t)\,\vec{y}$ donc à t *fixé* $\vec{\delta G} = \delta x\,\vec{x}$.

$\vec{OM} = \vec{OG} + \vec{GM} = (x + a\cos\phi)\vec{x} + (a + h(t) + a\sin\phi)\vec{y}$, donc à t *fixé*

$\vec{\delta M} = (\delta x - a\sin\phi\;\delta\phi)\vec{x} + (a\cos\phi\;\delta\phi)\vec{y}$, donc si M = I, $\phi = -\frac{\pi}{2}$ et on a

$\vec{\delta I} = (\delta x + a\,\delta\phi)\vec{x}$. Finalement le travail virtuel se réduit à $X\,\delta x + aX\,\delta\phi$ et les équations de Lagrange sont : $m\ddot{x} = X$ $\frac{ma^2}{2}\ddot{\phi} = aX$, on n'a rien obtenu pour Y.

2ème MANIERE :

On choisit *une liaison non respectée*, autrement dit, ici on fait comme si l'on n'avait pas $y = h(t) + a$.

D'où $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ma^2}{4}\dot{\phi}^2$, 3 paramètres (x,y,ϕ), il s'introduit de plus $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}) = m\ddot{y}$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$; $\vec{\delta G} = \delta x\,\vec{x} + \delta y\,\vec{y}$ puisqu'on "ignore" $y = h(t) + a$,

- le travail virtuel devient $-mg\,\vec{y}\cdot(\delta x\,\vec{x} + \delta y\,\vec{y}) + (X\vec{x} + Y\vec{y})\cdot[(\delta x + a\,\delta\phi)\vec{x} + \delta y\,\vec{y}]$ soit $(X\,\delta x) + (Y - mg)\,\delta y + (aX\,\delta\phi)$, et on obtient 3 équations de Lagrange : $m\ddot{x} = X$, $m\ddot{y} = Y - mg$, $\frac{ma^2}{2}\ddot{\phi} = aX$.

On introduit enfin la liaison $y = h(t) + a$, on voit qu'on a déterminé : $Y = m\ddot{h}(t) + mg$, etc...

CONCLUSION :

Sans pousser plus loin la résolution, on voit sur cet exemple comment, en ne respectant pas des liaisons, on obtient des précisions sur ces liaisons.

CHAPITRE 17

PRIMITIVES - EQUATIONS DIFFERENTIELLES

AVERTISSEMENT :

Ce chapitre de rappels est exposé en notations traditionnelles.

Les fonctions sont réelles et désignées par f, g, y, u, v, ... les variables sont réelles et désignées par x, t, ... les constantes sont désignées par a, b, C, K, α, β, ... On rappelle : $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$.

1° - PRIMITIVES USUELLES

- $\int u^{\alpha} du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

  $\int \frac{du}{u} = \text{Log}|u| + C$ (cas précédent pour $\alpha = -1$)

- $\int e^u du = e^u + C$ et $\int a^u du = \frac{1}{\text{Log } a} a^u + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

- $\int \cos u\, du = \sin u + C \qquad \int \sin u\, du = -\cos u + C$

  $\int \text{ch}\, u\, du = \text{sh}\, u + C \qquad \int \text{sh}\, u\, du = \text{ch}\, u + C$

- $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}\, u + C \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{cotg}\, u + C$

  $\int \frac{du}{\text{ch}^2 u} = \text{th}\, u + C \qquad \int \frac{du}{\text{sh}^2 u} = -\text{coth}\, u + C$

- $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc} \sin u + C = -\text{Arc} \cos u + K$

  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \text{Log}|u + \sqrt{u^2-1}| \equiv$
  - $\text{Arc ch}\, u + C$ si $u > 1$
  - $-\text{Arg ch}\,(-u) + C$ si $u < -1$

- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \text{Arg sh}\, u + C \equiv \text{Log}(u + \sqrt{u^2+1}) + C$

- $\int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arc tg}\, u + C$

- $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \text{Log}\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$ ou
  - $-\text{Arg coth}(-u) + C$ si $u < -1$
  - $\text{Arg th}\, u + C$ si $-1 < u < 1$
  - $\text{Arg coth}\, u + C$ si $u > 1$.

• On peut aussi retenir : $\int \frac{du}{\sin u} = \text{Log}\left|\text{tg}\,\frac{u}{2}\right| + C$, $\int \frac{du}{\cos u} = \text{Log}\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right| + C$

2° - METHODES GENERALES DE CALCUL DE PRIMITIVES

Si l'on ne reconnaît pas un cas du 1° ou un cas particulier du 3°, on a 2 méthodes générales qui peuvent y ramener :

• *Méthode "par parties"*

formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

Exemple 1. $I = \int \text{Log}|x|dx$, on pose $\begin{cases} u = \text{Log}|x| \\ dv = dx \end{cases}$ d'où $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

on a : $I = x\,\text{Log}|x| - \int dx$, $I = x\,\text{Log}|x| - x + C$.

Exemple 2. $I = \int \text{Arc tg}\,x\,dx$, avec $u = \text{Arc tg}\,x$ et $dv = dx$, donne $du = \frac{dx}{1+x^2}$ et $v = x$, d'où $I = x\,\text{Arc tg}\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$, la dernière $\int$ est visiblement $\frac{1}{2}\text{Log}(1+x^2)$ d'où $I = x\,\text{Arc tg}\,x - \frac{1}{2}\text{Log}(1+x^2) + C$.

• *Méthode "par changement de variable"*

Schéma : $I = \int f(x)dx$, avec $x = \phi(t)$, ϕ *bijective* et dérivable, devient $I = \int f\circ\phi(t)\,\dot{\phi}(t)dt$

En pratique, on pose souvent $t = \phi^{-1}(x)$ au lieu de $x = \phi(t)$.

Exemple 1. $I = \int \cos^5 x\,dx$. On pose $t = \sin x$ (supposé bijectif) et on a $I = \int (1-t^2)^2 dt$, d'où $I = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$, on "revient à x", finalement $I = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

Exemple 2. $I = \int \sqrt{4-x^2}\,dx$, avec $x \in [-2,+2]$ évident.
On peut poser $x = 2\sin t$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, on obtient $I = \int 2\sqrt{1-\sin^2 t}\;2\cos t\,dt$. Or $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, d'où $I = \int 4\cos^2 t\,dt = \int 2(1+\cos 2t)dt = 2t + \sin 2t + C$; d'où "en x", $I = 2\text{Arc sin}\frac{x}{2} + 2x\sqrt{1-x^2/4} + C$.

Remarque : en pratique, les intégrales définies (primitives avec bornes) permettent un choix sans ambiguïté du domaine de bijectivité de ϕ.

3° - METHODES PARTICULIERES DE CALCUL DE PRIMITIVES

3.1. - *FRACTIONS RATIONNELLES,* $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, P et Q polynômes

- On décompose en *éléments simples* (supposé connu), on applique ce qui suit.
- *type 1* : $\int \frac{dx}{(ax+b)^p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$: poser $ax+b = u$ ramène à $\int \frac{du}{u^p}$ connu.
- *type 2* : $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^p}\,dx$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ où $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

poser $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t$ ramène au type canonique $\int \frac{\alpha t + \beta}{(t^2+1)^p}\,dt$.

a. pour $\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^p}$, poser $t^2 + 1 = u$ ramène à $\int \frac{du}{u^p}$ connu.

b. pour $\int \frac{dt}{(t^2+1)^p}$, partir de $J_{p-1} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{p-1}}$ qu'on intègre par parties $\begin{cases} u = \dfrac{1}{(t^2+1)^{p-1}} \\ dv = dt \end{cases}$, il apparaît $\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^p}$ qu'on écrit $\int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^p}\,dt$, soit $J_{p-1} - J_p$. On obtient la formule de récurrence

$$J_p = \frac{1}{2p-2}\,\frac{t}{(t^2+1)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2p-2}\,J_{p-1}$$

on arrive ainsi à J_2, puis J_1 qui est connue : $J_1 = \text{Arc tg}\,t + C$. Revenir à x.

3.2. - *FRACTIONS RATIONNELLES DE SIN x, COS x,* $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Si tg x ou cotg x figurent, on peut les ramener à des sin x et cos x.

- *Méthode 1, toujours valable, souvent longue* (augmente les degrés).
  Poser $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$ $\left(dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \text{tg}\,x = \frac{2t}{1-t^2}\right)$, on est ramené à 3.1.
- *Méthode 2, à essayer en priorité, ne s'applique pas toujours.*

En désignant $R(\sin x, \cos x)dx$ par $f(x)dx$,

- si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$, poser $\cos x = t$.
- si $f(\pi-x)d(\pi-x) = f(x)dx$, poser $\sin x = t$.
- si $f(\pi+x)d(\pi+x) = f(x)dx$, poser $\text{tg}\,x = t$.

(dans ces trois cas) on est ramené à 3.1.

3.3. FRACTIONS RATIONNELLES DE sh x, ch x (compte tenu de th x = $\frac{sh\,x}{ch\,x}$, etc...)

- *Méthode 1, toujours valable, souvent longue* (augmente les degrés).

  Poser th $\frac{x}{2}$ = t (d'où dx = $\frac{2dt}{1-t^2}$, ch x = $\frac{1+t^2}{1-t^2}$, sh x = $\frac{2t}{1-t^2}$, th x = $\frac{2t}{1+t^2}$)

  on est ramené à 3.1.

- *Méthode 2, toujours valable, mais détruit les* sh, ch, th,...

  Exprimer en exponentielles (ch x = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, sh x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$,...)

  puis poser e^x = t (dx = $\frac{dt}{t}$,...), on est ramené à 3.1.

- *Méthode 3, à essayer en priorité, ne s'applique pas toujours.*

  Faire comme si sh était sin, ch était cos, (th : tg, coth : cotg) et appliquer la méthode 2 du 3.2. ci-dessus.

3.4. - POLYNOMES EN sin x, cos x, (ou en sh x, ch x)

On est ramené à 3.2 ou 3.3. s'il y a des tg x (ou th x) en général. Sinon, on a des termes de type $\int \sin^p x \cos^q x \, dx$ (de même en sh x ou ch x).

1er cas : p *et* q *pairs* (ou l'un nul) : *linéariser*, à l'aide des formules $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$, $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$,

ou $sh^2 a = \frac{ch\,2a - 1}{2}$, $ch^2 a = \frac{ch\,2a + 1}{2}$

2ème cas : *l'un au moins de* p *ou* q *impair*

poser cos x = u si c'est p, sin x = u si c'est q (de même pour ch, sh) on est ramené à un polynôme en u.

3.5. - FONCTIONS A RADICAUX PARTICULIERS

3.5.1. $\sqrt[n]{ax+b}$ ou $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, poser le radical égal à t, on en tire x en fonction de t^n, d'où dx, etc..., on revient à 3.1. en général.

3.5.2. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}$ et $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p'/q'}$, exposants irréductibles.

Calculer m = P.P.C.M. (q,q'), poser $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m}$ = t, etc...

3.5.3 $\sqrt[n]{ax^2+bx+c}$: poser $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,t$ (où $\Delta = b^2 - 4ac$), on est ramené à $\sqrt[n]{t^2+1}$ ou $\sqrt[n]{1-t^2}$ ou $\sqrt[n]{t^2-1}$ suivant signe de a.

Poser respectivement t = tg u ou sh u, t = sin u ou cos u, t = ch u ou $\frac{1}{\cos u}$ si t > 1, ou t = -ch u ou $\frac{1}{\cos u}$ si t < -1, on revient à des cas connus.

3.5.4. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (cas n = 2 dans 3.5.3), avec $\Delta > 0$ et $a < 0$: on est en réalité dans le cas $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$, donc $\alpha \leq x \leq \beta$ ou $\beta \leq x \leq \alpha$;

poser $x = \alpha\cos^2 t + \beta \sin^2 t$ avec $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ par exemple.

Dans certains cas, poser $x = \frac{1}{t}$ "améliore" l'intégrale...

3.6. - PRODUIT D'UN POLYNOME PAR Log|x|, ou e^x, ou cos x, ETC...

• $\int P(x)\text{Log}|x|dx$, parties, avec $u = \text{Log}|x|$, $dv = P(x)dx$, etc...

• Dans $\int P(x)\cos x\,dx$, $\int P(x)e^x\,dx$, etc... contrairement au cas précédent on prend les parties $u = P(x)$, dv = "le reste".

L'intégrale $-\int v\,du$ contient $P'(x)$ au lieu de $P(x)$, il n'y a qu'à poursuivre la méthode jusqu'à l'obtention d'intégrale évidente.

IMPORTANT :

Dans les intégrales définies $\int_a^b f(x)dx$, veiller à la bijectivité des changements de variables, et à changer les bornes dans les changements de variables. On peut être amené à fractionner $[a,b]$ pour assurer la bijectivité fraction par fraction.

4° - EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1

• Il est habituel de désigner par y' la dérivée d'une fonction inconnue de x désignée par y, ainsi que d'utiliser la notation $\frac{dy}{dx}$ et de séparer éventuellement dy et dx. Tout ce qui suit est exposé de cette manière.

4.1. - EQUATION A VARIABLES SEPAREES (OU SEPARABLES) $y' \times f(y) = g(x)$.

• On écrit $\frac{dy}{dx} f(y) = g(x)$, d'où $f(y)dy = g(x)dx$, et on intègre ; on obtient une relation de type $F(y) = G(x) + C$, équation des *courbes intégrales* de l'équation différentielle initiale.

• On peut essayer d'en tirer y en fonction de x (et de la constante C).

4.2. - EQUATION HOMOGENE $y' = f(\frac{y}{x})$

• On pose $y = tx$, où t *est fonction de* x, d'où $y' = t'x + t \equiv x\frac{dt}{dx} + t$.
On obtient $x\frac{dt}{dx} + t = f(t)$, soit encore $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}$ voir 4.1.

• On obtient ainsi la solution $x(t)$, d'où l'on tire $y(t) = t\,x(t)$. On peut essayer d'éliminer t pour avoir y en fonction de x.

• Parfois, on peut simplifier l'équation homogène en "passant en polaires". $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ donnent $dx = d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\,d\theta$, $dy = d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta\,d\theta$; on porte dans $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$, etc...

4.3. - EQUATION LINEAIRE $y' = A(x)y$, EQUATION AFFINE $y' = A(x)y + B(x)$

• L'équation *linéaire* $y' = A(x)y$ est aussi à variables séparées, voir 4.1, et on peut toujours écrire sa solution sous la forme $y = C\,f(x)$, en introduisant Log C comme constante, au lieu de C lors de l'intégration.

- L'équation *affine* $y' = A(x)y + B(x)$ s'intègre en 2 étapes.

1. Intégration de l'équation linéaire associée, $y' = A(x)y$, appelée aussi "équation sans second membre". D'où solution $y = C\,f(x)$.

2. On suppose alors que C devient fonction de x, ce qui adapte la solution précédente à l'équation "complète", sous la forme : $y' = C'f + Cf'$, donc $C'f + Cf' = A(x)y + B(x)$: on simplifie, il reste une équation différentielle de type $C' = g(x)$, qui fournit $C = G(x) + K$ (K constante). On reporte dans l'expression $y = C\,f(x)$, on a la solution définitive, où K = constante.

4.4. - AUTRES CAS (du 1er ordre)

1. *Bernoulli* $y' = A(x)y + B(x)y^n,\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}.$

- On pose $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ d'où $z' = \dfrac{-(n-1)y'}{y^n}$, d'où l'équation :

$z' = -(n-1)[A(x)z + B(x)]$, voir 4.3.

- Si n = 2, l'équation est dite "d'Euler du 1er ordre".
- Si $n \in \mathbb{Q}$, la méthode s'adapte.

2. *Clairaut* $y = xy' + f(y')$

- La solution générale s'obtient sans calculs, c'est la famille de droites d'équations $y = tx + f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, où t est un paramètre.

- Il est bon de préciser l'enveloppe de ces droites, définie par l'équation et par sa dérivée par rapport à t : $\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = +t\,f'(t) + f(t) \end{cases}$ donc en équations paramétriques.

3. *Lagrange* $y = xf(y') + g(y')$

- L'équation de Clairaut est un cas particulier. Ici, on pose $y' = t$ avec t *fonction de* x, et on dérive l'équation par rapport à x, d'où $t = f(t) + [x\,f'(t) + g'(t)]\dfrac{dt}{dx}$. On est ramené à 4.3, on obtient $x(t)$; on reporte dans l'équation, d'où $y(t) = x(t)f(t) + g(t)$ autrement dit : on a les courbes intégrales en équations paramétriques.

4. *Riccati* $y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$

- Si l'on ne connaît pas de solution, on ne sait pas résoudre, en général.

...

. Si l'on connaît une solution $y_1(x)$, on pose $y = \frac{1}{z} + y_1$, d'où $y' = -\frac{z'}{z^2} + y_1'$, on porte dans l'équation, on est ramené à 4.3.

REMARQUE :
Les équations rencontrées en Mécanique ne sont pas toujours d'un type connu. Il peut arriver qu'en posant $y = \frac{1}{z}$, ou $y = \sqrt{z}$, etc... on les "améliore".

5° - EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 2

Dans ce qui suit, y" désigne la dérivée seconde d'une fonction inconnue y de la variable (réelle) x.

5.1. - *EQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS* $ay'' + by' + cy = f(x), (a \neq 0)$

. On intègre en 2 étapes.

1. Equation "sans second membre" $ay'' + by' + cy = 0$
   On associe l'*équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$
   . Si $\Delta > 0$, 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2, d'où la solution $y = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$ ou $\lambda \operatorname{ch}(r_1 x) + \mu \operatorname{sh}(r_2 x)$
   . Si $\Delta = 0$, 1 solution double $\frac{-b}{2a}$, d'où $y = (Ax + B)e^{-\frac{b}{2a}x}$
   . Si $\Delta < 0$, 2 solutions complexes de type $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$, d'où $y = e^{\alpha x}[A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$.

2. Equation complète : *ajouter* à la solution "sans second membre" *une solution particulière* de l'équation complète, cette dernière solution pouvant être évidente, sinon on opère comme suit. On suppose que les constantes (λ,μ) ou (A,B) de la solution "sans second membre" sont fonctions de x. Par exemple si on note cette solution $y = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x)$, on a $y' = \lambda' f_1 + \mu' f_2 + \lambda f_1' + \mu f_2'$, on pose systématiquement $\lambda' f_1 + \mu' f_2 = 0$ (éq. 1).
   . On dérive à nouveau, on porte dans l'équation étudiée, on obtient après simplifications $\lambda' f_1' + \mu' f_2' = f(x)$ (éq. 2).
   . Les équations 1 et 2 fournissent séparément λ' et μ' en fonction de x, on intègre et on a λ et μ (avec apparition de 2 nouvelles "vraies constantes". On reporte ces résultats dans la solution d'où l'on est parti.

5.2. - *EQUATION D'EULER DU 2° ORDRE* $ax^2 y'' + bx y' + cy = 0 \quad (a \neq 0)$

. On pose $y = e^t$, donc $y' = \frac{dy}{dx}$ devient $y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$, et de même $y'' = (\frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt})e^{-2t}$, on porte dans l'équation, on est ramené à 5.1.

5.3. - EQUATION SANS y $f(x,y',y'') = 0$

• On pose $y' = z$, on est ramené au 1er ordre ; ayant ainsi trouvé $z(x)$, on obtient y par $y' = z(x) \Rightarrow y = \int z(x)dx + K$.

5.4. - EQUATION SANS x $f(y,y',y'') = 0$

• On peut se ramener à 5.3. en supposant x fonction de y, au lieu de y fonction de x. On rappelle : si $x = x(y)$, alors $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y'}$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y''}{y'^3}$ (et non pas $\frac{-y''}{y'^2}$).

• Il est, en général, préférable de se ramener au 1er ordre en posant $y' = u$, $y'' = \frac{du}{dy} \times y' \equiv u\frac{du}{dy}$, etc...

5.5. - EQUATION A COEFFICIENTS VARIABLES $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x)$

• Il faut connaître une solution de l'équation, "avec ou sans f(x)", soit y_1.

• Alors on pose $y = zy_1$, d'où $y' = z'y_1 + zy_1'$, etc..., on se ramène ainsi à 5.3 (sans z). On pose alors $z' = u$ et on se ramène au 1er ordre en u. Il est ainsi possible de trouver $u(x)$, et en "remontant", $y(x)$.

CHAPITRE 18

INTEGRALES DOUBLES - INTEGRALES TRIPLES

COMMENTAIRES

En cinétique du solide, les moments et produits d'inertie font intervenir des $\int$, $\iint$ ou $\iiint$ (suivant les dimensions). Dans ce Chapitre, on rappelle les notions ou méthodes de calcul à l'aide de "justifications" aussi intuitives que possible.

1° - RAPPELS SUR L'INTEGRALE SIMPLE

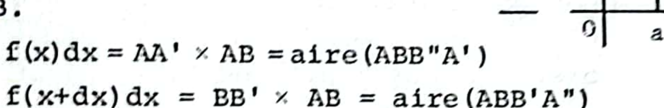
• Le lecteur est supposé connaître la signification de :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ où } F \text{ est primitive de } f$$

• *Interprétation* dans le cas de f *continue* sur [a,b].

Soit A d'abscisse x sur Ox, alors f(x) est représentée par AA' sur le schéma.

De même pour B = (x+dx,0) on a f(x+dx) = BB' ainsi que dx = AB.



On peut écrire : f(x)dx = AA' × AB = aire(ABB"A')

f(x+dx)dx = BB' × AB = aire(ABB'A")

La surface "mixtiligne" (ABB'A') en grisé sur le schéma, est encadrée par les deux précédentes. On peut remplir la surface limitée par les verticales x = a, x = b, l'axe des x et la courbe d'équation y = f(x), par des surfaces analogues à (ABB'A').

En prenant des dx de plus en plus petits, il faut de plus en plus de petites surfaces analogues à (ABB'A') pour remplir la surface précédente. A la limite, on peut ainsi imaginer une "infinité de surfaces nulles" dont on recouvre l'aire limitée par "x = a, x = b, axe Ox, courbe y = f(x)" et noter $\int_a^b f(x)\,dx$ ladite aire. Mais les encadrements tels que (ABB"A') et (ABB'A") sont aussi, à la limite, en nombre infini, et chacun d'aire nulle. A cause de la continuité de f, ces surfaces (de type $\infty \times 0$ à la limite) sont toutes égales, et par suite (en négligeant toute démonstration ici), on obtient le résultat suivant :

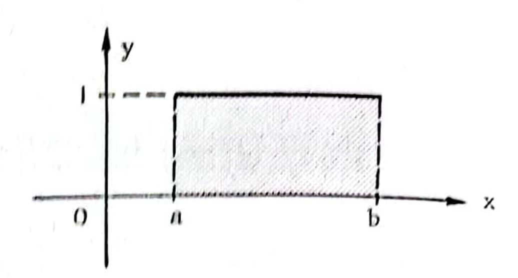
l'aire limité par	l'axe des x les verticales d'équations x = a, x = b la courbe d'équation y = f(x)

est donnée par l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

IMPORTANT :

Si $f(x) \equiv 1$ (et si $a < b$) on a :

$$\int_a^b dx = b - a = \text{longueur } [a,b]$$



AVERTISSEMENT :

Se reporter à des ouvrages d'analyse pour des démonstrations complètes et correctes. Ici, on n'a voulu donner qu'une intuition.

2° - INTEGRALE DOUBLE

• On généralise l'intégrale simple, à partir d'un domaine D du plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ et d'une fonction $f(x,y)$ ayant toutes les propriétés nécessaires à la validité de ce qui suit.

BUT RECHERCHÉ :

Le domaine D étant donné ainsi que la fonction f, on veut définir et calculer un nombre, désigné par $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ et appelé intégrale double de f sur D, en respectant des propriétés analogues à celle de l'intégrale simple, à savoir :

1. *linéarité* symbolisée par $\iint (f+g) = \iint f + \iint g$

   et $\iint \lambda f = \lambda \iint f$, ($\lambda$ constante)

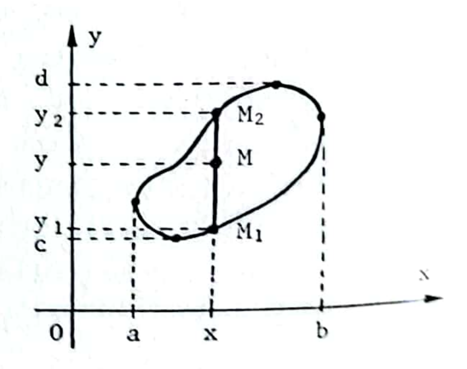
2. *positivité* symbolisée par $f \geqslant 0$ sur D $\Rightarrow$ $(\iint_D f) \geqslant 0$

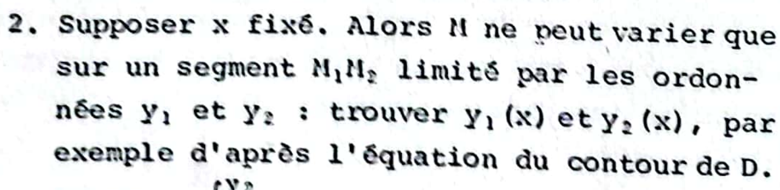
3. Si $f(x,y) \equiv 1$ alors $\iint_D dx\,dy$ = aire de D.

METHODE DE CALCUL DE $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

• On doit connaître D (par exemple par des équations du contour de D) et on doit connaître $f(x,y)$. Alors, on opère en 3 étapes.

1. Dessiner D, l'encadrer par des parallèles aux axes, déterminer les valeurs a, b, c, d définissant cet encadrement (voir schéma). Considérer un point $M(x,y)$ destiné à "parcourir D une fois et une seule".





2. Supposer x fixé. Alors M ne peut varier que sur un segment M_1M_2 limité par les ordonnées y_1 et y_2 : trouver $y_1(x)$ et $y_2(x)$, par exemple d'après l'équation du contour de D.

   CALCULER $\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$ EN CONSIDERANT x COMME CONSTANT d'où un résultat de type $F(x,y_2) - F(x,y_1)$.

3. Remplacer alors y_2 et y_1 par leurs expressions $y_2(x)$ et $y_1(x)$, d'où un résultat fonction de x seul, $G(x)$. Il ne reste plus qu'à "libérer" x

de manière que le segment M_1M_2 (que vient de parcourir M) balaie D. Pour cela, x varie de a à b. Donc on calcule $\int_a^b G(x)dx$. Le résultat est $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

REMARQUES :

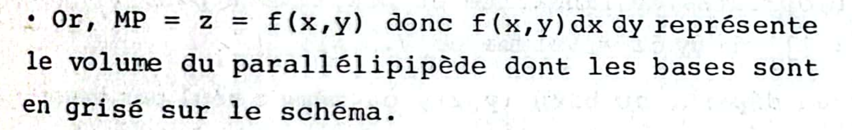
On peut, comme pour les dérivations partielles, intervertir l'ordre des intégrations partielles : fixer y d'abord, etc... (adapter les 2 et 3 précédents). De plus, les propriétés recherchées de linéarité et positivité sont évidentes, elles sont transmises par les deux intégrations successives. La propriété 3 sera évidente d'après l'interprétation suivante :

INTERPRETATION DE $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

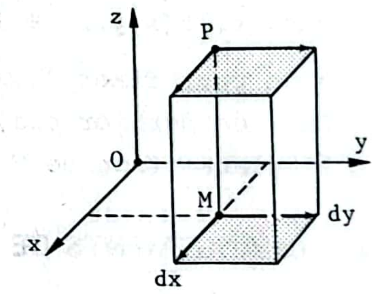
• On complète le repère $(O,\vec{x},\vec{y})$ par $(O,\vec{z})$, et à tout point M(x,y) de D dans $(O,\vec{x},\vec{y})$, on associe le point P de mêmes x, y avec $z = f(x,y)$.

• L'ensemble des points P ainsi définis (graphe de f sur D) est en général une surface S, dont la projection sur $(O,\vec{x},\vec{y})$ est D.

• On imagine dx et dy comme des accroissements respectifs de x et y (coordonnées de M), donc le "produit" dx dy comme une aire (voir schéma ci-dessous : aires en grisé).



• Or, MP = z = f(x,y) donc f(x,y) dx dy représente le volume du parallélipipède dont les bases sont en grisé sur le schéma.



• En supposant M (et P) fixé, et dx et dy diminuant indéfiniment, ce volume tend vers zéro. Mais si M parcourt D, on obtient une "infinité de volumes nuls" dont la somme est le volume encadré par D, par S, et par toutes les parallèles à $(O,\vec{z})$ qui projettent le contour de S sur le contour de D. En désignant par $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ce volume, on peut (intuitivement) conclure :

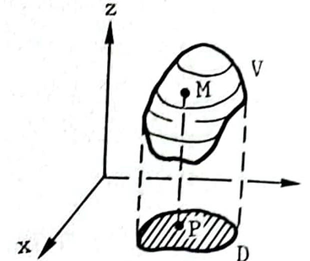
le volume limité par	le domaine D les parallèles à $(O,\vec{z})$ s'appuyant sur le contour de D la surface S d'équation $z = f(x,y)$

est donnée par l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

• Si $f(x,y) \equiv 1$, la surface S est définie par $z = 1$ (plan parallèle à $(O,\vec{x},\vec{y})$) et $\iint_D dx\,dy$ est bien égale à l'aire de D (multipliée par hauteur 1).

3° - INTEGRALE TRIPLE

• Il est aisé de concevoir une généralisation de l'intégrale double inspirée de la comparaison entre les 1° et 2° précédents, à partir d'un volume V donné et d'une fonction f(x,y,z) donnée, amenant à $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$



• *Mode de calcul résumé*

1. V étant donné, considérer M(x,y,z) destiné à le parcourir une fois et une seule, et fixer par exemple x et y. Alors M ne peut varier que sur un segment parallèle à $(O,\vec{z})$, limité par les cotes $z_1(x,y)$ et et $z_2(x,y)$.
2. Calculer $\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz$ en supposant x et y constants, d'où un résultat de type $F(x,y,z_2) - F(x,y,z_1)$. On remplace z_2 et z_1 par leurs expressions en fonction de x et y, le résultat devient fonction de x et y seuls, G(x,y).
3. En libérant x et y, on voit que la projection P de M sur $(O,\vec{x},\vec{y})$ doit parcourir la projection D du volume V sur ce plan. On détermine donc D, et on calcule $\iint_D G(x,y)\,dx\,dy$. Le résultat est l'intégrale triple étudiée.

Remarques : on a les propriétés de linéarité et positivité pour $\iiint$, ainsi que, si $f(x,y,z) \equiv 1$: $\iiint_V dx\,dy\,dz$ = volume de V.

• On peut fixer (x,z) au départ, ou bien (y,z), ou même z seul par exemple. Dans ce dernier cas, on commence par une $\iint$ sur le domaine défini par l'intersection de V et du plan z = cte ainsi fixé.

4° - CHANGEMENTS DE VARIABLES DANS $\iint$ OU $\iiint$

• *Intégrale double* : $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

· Un changement de variable est de type ϕ : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) \longrightarrow \phi(u,v) = (x,y) \end{array} \right.$

· Autrement dit : x = x(u,v), y = y(u,v).

· Alors : $(x,y) \in D \Rightarrow (u,v) \in \phi^{-1}(D)$, ϕ devant être bijective sur D, donc on doit déterminer le domaine $\phi^{-1}(D)$.

· On calcule aussi le *jacobien de* ϕ, soit j, défini comme étant le déterminant suivant (fonction de u et v) :

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

• On applique la formule : $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\phi^{-1}(D)} f\circ\phi(u,v)\,|\dot{j}|\,du\,dv$$

Remarque : dx dy devient $|\dot{j}|$ du dv, et non pas seulement du dv.

• *Intégrale triple* : $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; de même ϕ : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) \longrightarrow (x,y,z) \end{array}\right.$

$\dot{j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$, formule $$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\phi^{-1}(V)} f\circ\phi(u,v,w)\,|\dot{j}|\,du\,dv\,dw$$

INDEX ALPHABETIQUE

A

B

C

D

E

F

G

H

I

N

O

P

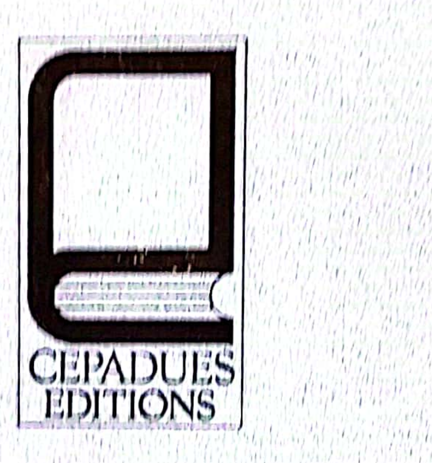
R

S

T

*

* *


CEPADUES
EDITIONS